

Übungen
Dynamische Systeme II
Stefan Liebscher
Abgabe bis Freitag, 13.01.2005

Aufgabe 33 Sei

$$\Sigma_N = \left\{ s = (s_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mid s_j \in \{0, \dots, N-1\} \right\}$$

die Menge der Folgen auf N Symbolen mit der Metrik

$$\text{dist}(s, s') := \sum_{j \in \mathbb{Z}} (2N)^{-|j|} |s_j - s'_j|.$$

Beweise, dass Σ_N so zur Cantormenge wird, d.h. die Menge ist

- (i) kompakt;
- (ii) total unzusammenhängend (alle Zusammenhangskomponenten sind einpunktig);
- (iii) perfekt (jeder Punkt $x \in \Sigma$ ist Häufungspunkt des Restes $\Sigma \setminus \{x\}$).

Aufgabe 34 Sei Σ_N der (metrisierte) Folgenraum der vorigen Aufgabe. Betrachte den Shift

$$\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N, \quad (s_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mapsto (s_{j+1})_{j \in \mathbb{Z}}.$$

Welche Fixpunkte hat σ ? Bestimme stabile und instabile Mengen und dadurch alle homoklinen und heteroklinen Orbits dieser Fixpunkte unter σ .

Aufgabe 35 Sei $\Phi : M \rightarrow M$ eine stetige Abbildung eines metrischen Raumes M . Wir nennen die Folge $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ einen δ -Pseudoorbit, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{dist}(\Phi(\xi_k), \xi_{k+1}) < \delta.$$

Wie nennen einen Φ -Orbit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\Phi^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ in M einen ε -Schatten des Pseudoorbits $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{dist}(x_k, \xi_k) < \varepsilon.$$

Wir sagen, dass (M, Φ) die *Schatteneigenschaft* besitzt, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass jeder δ -Pseudoorbit einen ε -Schatten hat.

- (i) Interpretiere die Schatteneigenschaft aus Sicht der Numerik.
- (ii) Beweise, dass der Shift auf zwei Symbolen die Schatteneigenschaft besitzt.

Freiwilliger Zusatz: Ist der Schatten eindeutig?

Aufgabe 36 Bei welcher der beiden folgenden „Büroklammerabbildungen“ tritt Shift-Dynamik auf? (In den Überlappungsregionen seien die Abbildungen jeweils affin-linear.)

