Übungen

Dynamische Systeme II

Stefan Liebscher

Abgabe bis Freitag, 13.01.2005

Aufgabe 33 Sei

$$\Sigma_N \;=\; \Big\{ s = (s_j)_{j\in\mathbb{Z}} \mid s_j \in \{0,\dots,N-1\} \Big\}$$

die Menge der Folgen auf N Symbolen mit der Metrik

$$\operatorname{dist}(s,s') \;:=\; \sum_{j\in\mathbb{Z}} (2N)^{-|j|} |s_j - s'_j|.$$

Beweise, dass Σ_N so zur Cantormenge wird, d.h. die Menge ist

(i) kompakt;
(ii) total unzusammenhängend (alle Zusammenhangskomponenten sind einpunktig);
(iii) perfekt (jeder Punkt $x \in \Sigma$ ist Häufungspunkt des Restes $\Sigma \setminus \{x\}$).

Aufgabe 34 Sei Σ_N der (metrisierte) Folgenraum der vorigen Aufgabe. Betrachte den Shift

$$\sigma \;:\; \Sigma_N \to \Sigma_N, \quad (s_j)_{j\in\mathbb{Z}} \mapsto (s_{j+1})_{j\in\mathbb{Z}}.$$

Welche Fixpunkte hat σ ? Bestimme stabile und instabile Mengen und dadurch alle homoklinen und heteroklinen Orbits dieser Fixpunkte unter σ.

Aufgabe 35 Sei $\Phi : M \to M$ eine stetige Abbildung eines metrischen Raumes M. Wir nennen die Folge $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einen *δ-Pseudoorbit*, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

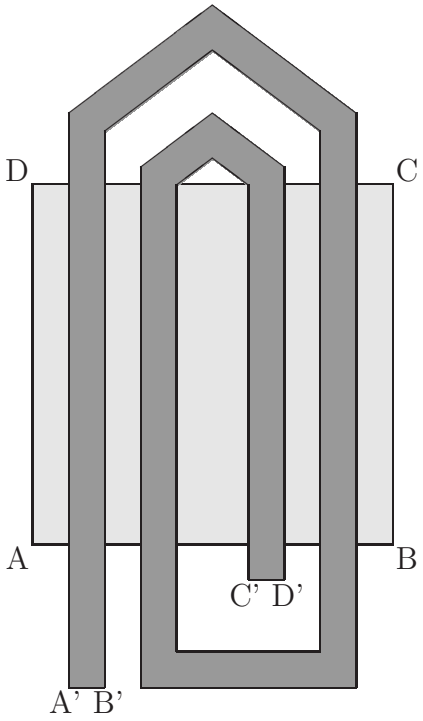
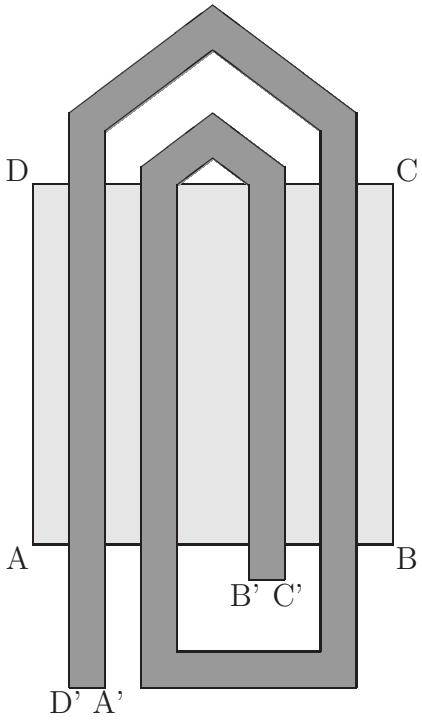
$$\operatorname{dist}(\Phi(\xi_k), \xi_{k+1}) \;<\; \delta.$$

Wie nennen einen Φ-Orbit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\Phi^k(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ in M einen *ε-Schatten* des Pseudoorbits $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\operatorname{dist}(x_k, \xi_k) \;<\; \varepsilon.$$

Wir sagen, dass (M,Φ) die *Schatteneigenschaft* besitzt, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass jeder δ-Pseudoorbit einen ε-Schatten hat.

(i) Interpretiere die Schatteneigenschaft aus Sicht der Numerik.
(ii) Beweise, dass der Shift auf zwei Symbolen die Schatteneigenschaft besitzt.

Freiwilliger Zusatz: Ist der Schatten eindeutig?

Aufgabe 36 Bei welcher der beiden folgenden „Büroklammerabbildungen“ tritt Shift-Dynamik auf? (In den Überlappungsregionen seien die Abbildungen jeweils affin-linear.)