

Übungen
Dynamische Systeme II
Stefan Liebscher
Abgabe bis Freitag, 20.01.2005

Aufgabe 37 [Addier-Maschine] Betrachte den Raum

$$\Sigma_2^+ = \left\{ s = (s_j)_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mid s_j \in \{0, 1\} \right\}$$

der (einseitigen) Folgen auf den Symbolen $\{0, 1\}$. Die Topologie auf Σ_2^+ ist die Produkttopologie, analog der Definition für beidseitige Folgen aus der Vorlesung. Sie wird z.B. von den Zylindermengen

$$N_k(s) := \left\{ \tilde{s} \in \Sigma_2^+ \mid \tilde{s}_j = s_j \quad \forall j \leq k \right\}, \quad s \in \Sigma_2^+, \quad k \in \mathbb{N},$$

erzeugt. Eine äquivalente Metrik ist

$$\text{dist}(s, \tilde{s}) := \sum_{j \geq 0} 2^{-j} |s_j - \tilde{s}_j|.$$

Zu beliebigem, fest gewähltem $g \in \Sigma_2^+$ definiere die (Additions-)Abbildung

$$T_g : \Sigma_2^+ \longrightarrow \Sigma_2^+, \quad a = (a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \longmapsto T_g(a) = (T_g(a)_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$$

mittels des Übertrages $r \in \Sigma_2^+$ rekursiv durch:

$$\begin{aligned} r_0 &:= 0, \\ T_g(a)_n + 2r_{n+1} &:= a_n + g_n + r_n, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Interpretiert man endliche Anfangsstücke der Folgen als natürliche Zahlen in Dualdarstellung, entspricht somit $T_g(a)$ gerade der Summe aus a und g .

- (i) Sei $g_0 = 0$. Zeige, dass Σ_2^+ keinen dichten Orbit bezüglich der Iteration von T_g besitzt. Finde dazu beispielsweise nichttriviale invariante Mengen.
- (ii) Sei $g = (1, 0, 0, 0, \dots)$. Finde einen dichten Orbit.

Freiwilliger Zusatz: Zeige die Existenz eines dichten Orbits für jedes g mit $g_0 = 1$. Es gilt in diesem Falle sogar, dass jeder(!) Orbit dicht in T_g liegt. Allerdings existieren keine periodischen Orbits und keine sensitive Abhängigkeit von Anfangsbedingungen, d.h. T_g ist nicht chaotisch.

Aufgabe 38 Betrachte die durch die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

definierte Iteration auf dem 2-Torus $T = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$. Finde ein Hufeisen für eine geeignete iterierte B^k , $k > 0$.

Hinweis: Betrachte den Torus als Einheitsquadrat mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und verfolge die Bilder eines Parallelogramms parallel zu den Eigenvektoren von B .

Aufgabe 39 Betrachte die Hopseball-Abbildung $f_{\alpha,\gamma}$ auf $S^1 \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\Phi_{j+1} &= \Phi_j + v_j, \\ v_{j+1} &= \alpha v_j - \gamma \cos(\Phi_j + v_j),\end{aligned}$$

mit $0 < \alpha < 1$ und $0 < \gamma$, sowie das Gebiet

$$D := \{(\Phi, v) \in S^1 \times \mathbb{R} : |v| \leq \frac{\gamma}{1-\alpha} + \varepsilon\}$$

für ein gegebenes $\varepsilon > 0$. Wie in der Vorlesung definieren wir den Attraktor

$$\mathcal{A}_{\alpha,\gamma} := \bigcap_{n=0}^{\infty} f_{\alpha,\gamma}^n(D).$$

- (i) Zeige, dass $\mathcal{A}_{\alpha,\gamma}$ nicht von der Wahl von ε abhängt.
- (ii) Ist $\mathcal{A}_{\alpha,\gamma}$ zusammenhängend?
- (iii) Zeige, dass die Abbildung $(\alpha, \gamma) \mapsto \mathcal{A}_{\alpha,\gamma}$ oberhalb-stetig ist, d.h.

$$\lim_{(\alpha,\gamma) \rightarrow (\bar{\alpha}, \bar{\gamma})} \text{dist}(\mathcal{A}_{\alpha,\gamma}, \mathcal{A}_{\bar{\alpha}, \bar{\gamma}}) = 0,$$

für den (nicht symmetrischen) Abstand

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} |x - y|.$$

Was bedeutet Oberhalb-Stetigkeit in diesem Fall?

Aufgabe 40 Seien die Annahmen des Satzes zum C^0 -Hufeisen für die Iteration Φ auf dem Quadrat Q erfüllt. Es existiert also ein Homöomorphismus τ , der $\Phi : I \rightarrow I$ auf der invarianten Menge $I \subset Q$ zum Shift $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ konjugiert. Seien die horizontalen und vertikalen Lipschitz-Kurven $h(s) = h_{(s_k)_{k \geq 0}}$ and $v(s) = v_{(s_k)_{k < 0}}$ wie in der Vorlesung definiert, d.h.

$$\begin{aligned}h(s) &:= \{ q \in Q \mid \Phi^k(q) \in H_{s_k} \ \forall k \geq 0 \}, \\ v(s) &:= \{ q \in Q \mid \Phi^k(q) \in H_{s_k} \ \forall k < 0 \},\end{aligned}$$

für jede Folge $s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \Sigma$ und gegebene horizontale Streifen $\{H_a \mid a \in A\}$ der Hufeisenkonstruktion.

Betrachte die stabilen und instabilen Mengen zu Punkten $p \in I$,

$$\begin{aligned}W^s(p) &:= \left\{ q \in Q \mid \Phi^k(q) \in \bigcup_{a \in A} H_a \ \forall k \geq 0, \ \lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\Phi^k(p), \Phi^k(q)) = 0 \right\}, \\ W^u(p) &:= \left\{ q \in Q \mid \Phi^k(q) \in \bigcup_{a \in A} H_a \ \forall k < 0, \ \lim_{k \rightarrow -\infty} \text{dist}(\Phi^k(p), \Phi^k(q)) = 0 \right\}\end{aligned}$$

Sei $p = \tau^{-1}(s)$ der der Folge s zugeordnete Punkt der invarianten Menge I . Beweise:

- (i) $h(s) \subset W^s(p)$ and $v(s) \subset W^u(p)$;
- (ii) Die Kurven $h(s)$ bzw. $v(s)$ sind die Zusammenhangskomponenten von $W^s(p)$ bzw. $W^u(p)$, die p enthalten. D.h. sie sind die lokalen stabilen bzw. instabilen (Lipschitz-) Mannigfaltigkeiten von p .