Übungen

Dynamische Systeme II

Stefan Liebscher

Abgabe bis Freitag, 27.01.2005

Aufgabe 41 Sei φ_t ein Fluss und $\Phi = \varphi_1$ die zugehörige Zeit-1-Abbildung. Zeige, dass dann Φ keine transversalen homoklinen Punkte besitzen kann.

Aufgabe 42 [Hyperbolisches Hufeisen] Sei Φ eine C^1-Iteration des Quadrates Q, die den Annahmen das Satzes zum C^1-Hufeisen genüge. Insbesondere existiert ein positiver Parameter $\mu < 1/2$, eine invariante Menge $\Lambda \subset Q$ mit Shift-Dynamik, sowie in jedem Punkt $p \in \Lambda$ vorwärts- bzw. rückwärts-invariante Kegel $K^s = \{(\xi, \eta) \,:\, |\eta| \leq \mu|\xi|\}$, $K^u = \{(\xi, \eta) \,:\, |\xi| \leq \mu|\eta|\}$,

$$D\Phi(p)\, K^u \subset \operatorname{int} K^u \cup \{0\}, \qquad D\Phi^{-1}(p)\, K^s \subset \operatorname{int} K^s \cup \{0\},$$

mit der Kontraktions-/Expansions-Eigenschaft

$$\begin{aligned} |\tilde{\xi}| &\leq \mu|\xi| &\quad& \text{für alle} \quad (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \in K^s, \\ |\tilde{\eta}| &\geq \mu^{-1}|\eta| && \text{für alle} \quad (\xi, \eta) \in K^u, \end{aligned}$$

wobei $\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = D\Phi(p) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$.

Zusätzlich sei

$$\mu^2 < \inf_{p \in \Lambda} |\det D\Phi(p)| \quad \text{und} \quad \mu^2 < \inf_{p \in \Lambda} |\det D\Phi^{-1}(p)|.$$

Beweise die Existenz einer hyperbolischen Struktur auf Λ.

Hinweis: Betrachte Linienbündel $L^{s/u}(p)$ in $K^{s/u}$ auf Λ, gegeben z.B. durch $\eta = \alpha^s(p)\xi$ und $\xi = \alpha^u(p)\eta$ mit $|\alpha^{s/u}| \leq \mu$. Beweise dann, dass $D\Phi^{\pm 1}$ eine Kontraktion auf $L^{s/u}$ darstellt.

Aufgabe 43 Betrachte die Hénon-Abbildung

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= 1 - \alpha x_j^2 + \beta y_j, \\ y_{j+1} &= x_j. \end{aligned}$$

Finde ein Hufeisen für Parameterwerte $1 \ll \alpha$ und $0 < \beta \ll 1$.

Hinweis: $Q = [-0.1, 0.1] \times [-1, 1]$.

Aufgabe 44 Sei Φ ein Diffeomorphismus der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit einem transversalen homoklinen Punkt. In der Vorlesung haben wir eine Iterierte Φ^n auf einer geeigneten invarianten Menge zum Shift auf zwei Symbolen konjugiert.

Zeige dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ der Shift auf m Symbolen zu einer geeigneten (ggf. von m abhängigen) Iterierten Φ^n auf einer geeigneten invarianten Menge konjugiert ist.