Übungen

# Dynamische Systeme II

Stefan Liebscher

**Abgabe bis Freitag, 3.2.2005**

**Aufgabe 45** Ein Maß für die Komplexität einer Abbildung $\Phi$ ist die *topologische Entropie* $h_{\text{top}}$: Sei $N(n)$ die Anzahl periodischer Punkte von $\Phi$ mit (nicht notwendig minimaler) Periode $n$. Dann ist die Entropie definiert durch

$$h_{\text{top}} \;:=\; \limsup_{n\to\infty} \frac{\log N(n)}{n}.$$

Berechne die Entropie $h$ des Shifts auf $m$ Symbolen. Beweise, dass jede Iteration $\Phi$, die einen Shift enthält (d.h. es existiert eine invariante Menge $I$, so dass $\Phi|_I$ zum Shift auf $m$ Symbolen konjugiert ist), positive topologische Entropie besitzt.

**Aufgabe 46** Sei $A = (a_{ij})_{0\le i,j\le N-1} \in \{0,1\}^N \times \{0,1\}^N$ eine $(N\times N)$-Matrix mit Einträgen 0 oder 1. Definiere den Folgenraum

$$\Sigma_A := \left\{ \mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_N \mid \forall n\in\mathbb{Z} \;:\; a_{x_n x_{n+1}} = 1 \right\}.$$

Hierbei gibt $A$ die zulässigen Nachfolger eines Folgengliedes $x_n$ an und wird deshalb als Übergangsmatrix bezeichnet. Sofern keine Spalte und keine Zeile von $A$ der Nullvektor ist, ist auch $\Sigma_A \neq \emptyset$. Wir wollen die topologische Entropie des Shifts $\sigma$ auf $\Sigma_A$, der auch als Subshift vom endlichen Typ bezeichnet wird, bestimmen.

(i) Bezeichne
$$\Sigma_{A,n,\alpha,\beta} := \{ (x_0,\ldots,x_n) \mid \mathbf{x}\in\Sigma_A,\; x_0=\alpha,\; x_n=\beta \}.$$
die Menge der endlichen Teilstücke der Länge $n$, die mit $\alpha$ beginnen und mit $\beta$ enden. Zeige, dass die Anzahl solcher endlichen Teilstücke durch den entsprechenden Eintrag in $A^n$ gegeben ist:
$$|\Sigma_{A,n,\alpha,\beta}| \;=\; (A^n)_{\alpha\beta}$$

(ii) Zeige, dass die in der vorigen Aufgabe definierte topologische Entropie durch den betragsmäßig größten Eigenwert von $A$ gegeben ist:
$$h_{\text{top}}(\Sigma_A,\sigma) \;=\; \log|\lambda_{\max}(A)|.$$

**Aufgabe 47** Zeige, dass die Abbildung

$$G \;:\; [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad G(x) = x^3 + x,$$

nicht $C^1$-strukturell stabil ist.

**Aufgabe 48** Betrachte eine $C^1$-Iteration $\Phi$ auf dem Quadrat $Q$. Seien die Voraussetzungen des Satzes zum $C^1$-Hufeisen erfüllt. Somit existiert eine invariante Menge $I^\Phi \subset Q$ mit Shift-Dynamik.

Zeige, dass alle genügend $C^1$-nahen Iterationen $\Psi$ ebenfalls den Shift enthalten, d.h. es existiert ein $\varepsilon > 0$ (abhängig von $\Phi$), so dass jede $C^1$-Iteration $\Psi$ auf $Q$ mit

$$\|\Phi - \Psi\|_{C^1} < \varepsilon$$

auf einer invarianten Menge $I^\Psi \subset Q$ zum Shift konjugiert ist. Finde einen Homöomorphismus, der $\Phi|_{I^\Phi}$ und $\Psi|_{I^\Psi}$ konjugiert.

*Hinweis:* Es darf angenommen werden, dass die vertikalen Streifen den vertikalen Rand des Quadrates nicht berühren, d.h. $0 < x < 1$ für alle $(x, y) \in V_a$. Analog sollen die horizontalen Streifen $H_a$ zum horizontalen Rand von $Q$ disjunkt sein.