Übungen

Dynamische Systeme II

Stefan Liebscher

Abgabe bis Freitag, 3.2.2005

Aufgabe 45 Ein Maß für die Komplexität einer Abbildung Φ ist die *topologische Entropie* h_{top}: Sei $N(n)$ die Anzahl periodischer Punkte von Φ mit (nicht notwendig minimaler) Periode n. Dann ist die Entropie definiert durch

$$h_{\text{top}} \;:=\; \limsup_{n\to\infty} \frac{\log N(n)}{n}.$$

Berechne die Entropie h des Shifts auf m Symbolen. Beweise, dass jede Iteration Φ, die einen Shift enthält (d.h. es existiert eine invariante Menge I, so dass $\Phi|_I$ zum Shift auf m Symbolen konjugiert ist), positive topologische Entropie besitzt.

Aufgabe 46 Sei $A = (a_{ij})_{0\le i,j\le N-1} \in \{0,1\}^N \times \{0,1\}^N$ eine $(N \times N)$-Matrix mit Einträgen 0 oder 1. Definiere den Folgenraum

$$\Sigma_A := \left\{ \mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_N \mid \forall\, n\in\mathbb{Z} \;:\; a_{x_n x_{n+1}} = 1 \right\}.$$

Hierbei gibt A die zulässigen Nachfolger eines Folgengliedes x_n an und wird deshalb als Übergangsmatrix bezeichnet. Sofern keine Spalte und keine Zeile von A der Nullvektor ist, ist auch $\Sigma_A \neq \emptyset$. Wir wollen die topologische Entropie des Shifts σ auf Σ_A, der auch als Subshift vom endlichen Typ bezeichnet wird, bestimmen.

(i) Bezeichne

$$\Sigma_{A,n,\alpha,\beta} := \{ (x_0,\ldots,x_n) \mid \mathbf{x} \in \Sigma_A,\; x_0 = \alpha,\; x_n = \beta \}.$$

die Menge der endlichen Teilstücke der Länge n, die mit α beginnen und mit β enden. Zeige, dass die Anzahl solcher endlichen Teilstücke durch den entsprechenden Eintrag in A^n gegeben ist:

$$|\Sigma_{A,n,\alpha,\beta}| \;=\; (A^n)_{\alpha\beta}$$

(ii) Zeige, dass die in der vorigen Aufgabe definierte topologische Entropie durch den betragsmäßig größten Eigenwert von A gegeben ist:

$$h_{\text{top}}(\Sigma_A,\sigma) \;=\; \log|\lambda_{\max}(A)|.$$

Aufgabe 47 Zeige, dass die Abbildung

$$G \;:\; [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad G(x) = x^3 + x,$$

nicht C^1-strukturell stabil ist.

Aufgabe 48 Betrachte eine C^1-Iteration Φ auf dem Quadrat Q. Seien die Voraussetzungen des Satzes zum C^1-Hufeisen erfüllt. Somit existiert eine invariante Menge $I^\Phi \subset Q$ mit Shift-Dynamik.

Zeige, dass alle genügend C^1-nahen Iterationen Ψ ebenfalls den Shift enthalten, d.h. es existiert ein $\varepsilon > 0$ (abhängig von Φ), so dass jede C^1-Iteration Ψ auf Q mit

$$\|\Phi - \Psi\|_{C^1} < \varepsilon$$

auf einer invarianten Menge $I^\Psi \subset Q$ zum Shift konjugiert ist. Finde einen Homöomorphismus, der $\Phi|_{I^\Phi}$ und $\Psi|_{I^\Psi}$ konjugiert.

Hinweis: Es darf angenommen werden, dass die vertikalen Streifen den vertikalen Rand des Quadrates nicht berühren, d.h. $0 < x < 1$ für alle $(x, y) \in V_a$. Analog sollen die horizontalen Streifen H_a zum horizontalen Rand von Q disjunkt sein.