

Übungen
Dynamische Systeme II
Stefan Liebscher
Abgabe bis Freitag, 10.2.2005

Aufgabe 49 Auf dem Folgenraum

$$\Sigma_2 = \{(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mid a_k \in \{0, 1\}\}$$

definieren wir das unter dem Shift σ invariante Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf den Zylindermengen

$$U_{N,M}(b) = \{a \in \Sigma_2 \mid a_i = b_i, \text{ für alle } N \leq i \leq M\}$$

als $\mu(U_{N,M}(b)) = 2^{-(M-N+1)}$. Dieses Maß wird auf alle Borelmengen von Σ_2 fortgesetzt, so dass es invariant unter dem Shift σ bleibt. Definiere die symmetrische Differenz

$$X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \cap (\Sigma_2 \setminus Y)) \cup ((\Sigma_2 \setminus X) \cap Y).$$

- (i) Zeige, dass es zu jeder Borelmenge B und jedem $\varepsilon > 0$ eine (bzgl. μ) ε -nahe endliche Vereinigung von Zylindermengen $Z = \bigcup_{i=1}^m U_{N_i, M_i}(b_i)$ gibt:

$$\mu(B \triangle Z) < \varepsilon.$$

- (ii) Für jede Zylindermenge $Z = U_{N,M}(b)$ und deren Bild $\tilde{Z} = \sigma^{N+M+1}(Z)$ unter dem (genügend weiten) Shift gilt:

$$\mu(Z \triangle \tilde{Z}) = 2\mu(Z)(1 - \mu(Z))$$

Hinweis: Z und $\tilde{Z}$ sind (als Zufallsereignisse betrachtet) unabhängig.

- (iii) Zeige, dass μ ergodisch ist, d.h. jede σ -invariante Borelmenge B das Maß 0 oder 1 hat.

Aufgabe 50 Sei $\varphi \in C^2(S^1)$ ein Diffeomorphismus mit irrationaler Rotationszahl $\rho(\varphi)$. Finde ein invariantes Borelmaß μ , bezüglich dessen φ ergodisch ist.

Freiwilliger Zusatz: Zeige, daß es unter den Wahrscheinlichkeitsmaßen (d.h. $\mu(S^1) = 1$) genau ein solches ergodisches Maß gibt.

Aufgabe 51 Betrachte wieder den Subshift von endlichem Typ, d.h. den Shift auf dem Folgenraum

$$\Sigma_A := \{\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_N \mid \forall n \in \mathbb{Z} : a_{x_n x_{n+1}} = 1\}$$

zu gegebener Übergangsmatrix $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq N-1}$ mit Einträgen 0 oder 1. Keine Spalte und keine Zeile von A sei der Nullvektor.

Zeige dass der Shift genau dann einen dichten Orbit auf Σ_A besitzt, wenn für alle $0 \leq i, j \leq N-1$ eine Potenz A^n mit $n > 0$ existiert, so dass das Matrix-Element $(A^n)_{i,j}$ nicht verschwindet. (Die Übergangsmatrix A wird dann auch irreduzibel genannt.)

Aufgabe 52 Sei X ein kompakter metrischer Raum und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf den Borelmengen, so dass jede offene Menge positives Maß besitzt (der Support von μ ist ganz X). Sei ferner $\Phi : X \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, die bzgl. μ mischend ist, d.h. für alle messbaren Mengen A, B gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Phi^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Zeige, dass Φ auch topologisch mischend ist, d.h. für alle offenen Mengen A, B existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq n$ gilt

$$\Phi^{-m}(A) \cap B \neq \emptyset.$$