

1. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG DYNAMISCHE SYSTEME II

ABGABE AM 26.10.2005 IN DER VORLESUNG

AUFGABE 1:

- (i) Bestimme für $\lambda \in \mathbb{R}$ die Gleichgewichte der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = x^2 + \lambda x$$

und untersuche ihre Stabilität.

- (ii) Die Raleigh-Gleichung

$$\ddot{x} + \dot{x}^3 - 2\mu\dot{x} + x = 0$$

beschreibt einen Oszillator mit einer geschwindigkeitsabhängigen Dämpfung. Berechne für $\mu \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte der Linearisierung in $x = \dot{x} = 0$ und untersuche mit `DSTool`, wie sich das Phasenportrait bei $\mu = 0$ ändert.

AUFGABE 2:

Sei Φ_t ein Fluss auf $\mathbb{R}^n$. Zeige: Falls der Vorwärtsorbit $\gamma_+(x)$ eines Punktes x beschränkt ist, so gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\Phi_t(x), \omega(x)) = 0$.

Dabei ist $\text{dist}(y, A) := \inf_{a \in A} |y - a|$ der *Abstand* des Punktes y zur Menge A .

AUFGABE 3:

Von Rosenzweig & MacArthur stammt das folgende Räuber-Beute-Modell:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{a_2 x}{b_2 + x} y \\ \dot{y} &= \frac{a_2 x}{b_2 + x} y - d_2 y - \frac{a_3 y}{b_3 + y} z \\ \dot{z} &= \frac{a_3 y}{b_3 + y} z - d_3 z\end{aligned}$$

Dabei bedeuten x , y und z die Bevölkerungsdichten verschiedener Spezies.

Erkläre die Bedeutung der einzelnen Terme, finde heraus, wer wen jagt und beschreibe das Verhalten der Einzelpopulationen, wenn die jeweils anderen Spezies nicht vorhanden sind.

Zeige, dass die Menge $A = \{(x, y, z); x \geq 0, y \geq 0, z = 0\}$ positiv invariant ist, finde alle Gleichgewichte in dieser Menge und untersuche ihre Stabilität.

AUFGABE 4:

Untersuche mit Hilfe von `DSTOOL`, `MATLAB` o.ä. das vollständige System aus Aufgabe 3 für die Parameterwerte $r = k = 1$, $a_2 = 1.66$, $b_2 = 0.33$, $d_2 = 0.27$, $a_3 = 0.05$, $b_3 = 0.5$, $d_3 = 0.01$ und beschreibe das Verhalten typischer Lösungen.

Freiwillig: Die Maxima der Funktion $z(t)$ liegen alle in der Ebene $\Sigma = \{(x, y, z); y = \frac{d_3 b_3}{c_3 a_3 - d_3}\}$. Plote mit `DSTool` die Poincaré-Abbildung (Rückkehrabbildung) $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$, die dem n -ten Maximum (x_n, z_n) das $(n + 1)$ -te Maximum zuordnet.

WWW-Seite zur Vorlesung:

<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>

Zum DSTOOL-Parser:

Eigene Dynamische Systeme lassen sich bei DSTOOL über das Parserfenster definieren. Dazu wählt man "Parsed Dynamical System" und erhält ein Fenster mit folgendem Text:

```
# The Lorenz system
x' = sigma ( y - x )
y' = rho x - y - x z
z' = -beta z + x y
```

```
INITIAL sigma 10 rho 28 beta 2.6667
```

Diesen Text muss man nun abändern. Dabei ist folgendes zu beachten:

1. Mit den Knöpfen **Vector Field** bzw. **Mapping** gibt man an, ob es sich um ein kontinuierliches oder ein diskretes dynamisches System handelt.
Achtung: Auch bei diskreten Systemen steht im Parser $x' = \dots$ etc.
2. Der Parser versteht nur Gleichungen 1. Ordnung, Gleichungen höherer Ordnung müssen als System 1. Ordnung umgeschrieben werden,
3. Der Parser versteht **nur** die folgenden Befehle:

Konstanten: PI, pi, E

Operatoren: +, -, *, /, % (mod), ^

Mathematische Funktionen: sin, cos, tan, asin, acos, atan, sinh, cosh, tanh, log, ln, exp, abs, sqrt

4. Mit INITIAL gibt man die voreingestellten Anfangsbedingungen, mit RANGE den voreingestellten Darstellungsbereich an. Beides kann man natürlich später ändern. Mit PERIODIC kann man einzelne Variablen periodisch machen, um Systeme auf der Kreislinie oder auf dem Torus zu simulieren.
PERIODIC x 0 1 y 0 1 macht beispielsweise die Variablen x und y beide 1-periodisch.
Hilfsfunktionen kann man *nach* der Definition des dynamischen Systems eingeben, wie die Gleichungen selbst, jedoch ohne Strich, also z.B. Ham = 0.5*(x*x + y*y).
5. Das neue dynamische System wird durch den Button **Build** geladen. Der Button **Make C Code** führt zum Absturz des Programms...