J. Härterich, C. Pfrang
FU Berlin
Wintersemester 2005/06

2. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamische Systeme II

Abgabe bis zum 03.11.2005

Aufgabe 5:
Untersuche mit `DSTOOL` oder `MATLAB` die Zeit–2π–Abbildung der Duffing-Gleichung

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x + x^3 = \gamma \cos t$$

für verschiedene Werte von δ und γ, beispielsweise ($\delta = 0.25, \gamma = 0.4$), ($\delta = 0.2, \gamma = 0.3$), ($\delta = 0.22, \gamma = 0.3$), ($\delta = 0.25, \gamma = 0.3$) und ($\delta = 0.15, \gamma = 0.3$).
Schreibe die Gleichung dazu als *autonome* Gleichung mit einer neuen Variable `newtime` für die Zeit, mache diese Variable periodisch durch `PERIODIC newtime 0 6.28` und wähle dann im **Orbit**–Menü statt "Fixed Steps" die Option "Poincare section".

Aufgabe 6: Vom diskreten zum kontinuierlichen Dynamischen System
Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ ein Homöomorphismus. Bette die eindimensionale Abbildung f so in ein kontinuierliches dynamisches System Φ auf einer Fläche S ein, dass f die Zeit-1-Abbildung $x \mapsto \Phi(1,x)$ auf einem transversalen Schnitt ist.
Welche Typen von Flächen S können dabei auftreten ?

Aufgabe 7:

(i) Zeige, dass für festes $\eta > 0$ auf dem Funktionenraum

$$BC^0_\eta(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n) := \{x \in BC^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n);\, \|x\|_{BC^0_\eta} := \sup_{t \geq 0} e^{\eta t}|x(t)| < \infty\}$$

durch $\|x\|_{BC^0_\eta}$ eine Norm definiert wird und dass $BC^0_\eta(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ mit dieser Norm ein Banachraum ist.

(ii) Sei M eine $n \times n$-Matrix, deren Eigenwerte alle auf der imaginären Achse liegen.
Zeige, dass für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ und $t \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\|e^{Mt}\| \leq K e^{\varepsilon |t|}$$

gilt, wobei $K = K(\varepsilon) > 0$ eine Konstante ist.
Wann kann K unabhängig von ε gewählt werden ?

Aufgabe 8:
Betrachte das diskrete dynamische System

$$\left.\begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & Ax_k + F(x_k, y_k) \\ y_{k+1} & = & By_k + G(x_k, y_k) \end{array}\right\} \qquad (*)$$

mit einer $n \times n$–Matrix A, deren Eigenwerte vom Betrag kleiner als a sind und einer $m \times m$–Matrix B, deren Eigenwerte vom Betrag größer als b sind, wobei $a < b$. Die Nichtlinearitäten F und G erfüllen die Gleichung $F(0,0) = G(0,0) = 0$ und $DF(0,0) = Dg(0,0) = 0$.
Stelle eine diskrete Variation-der-Konstanten-Formel für Lösungen (x_k, y_k) von $(*)$ auf.
Wie lautet das Analogon zur Integralgleichung aus Lemma 2.3 für Lösungen, bei denen $\|x_k\| + \|y_k\|$ höchstens wie a^k wächst ?
Tipp: Benutze die Abschätzung $\|B^{-k}\| \leq C \cdot b^{-k}$ für $k \leq 0$.