J. Härterich, C. Pfrang
FU Berlin
Wintersemester 2005/06

3. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamische Systeme II

Abgabe bis 11.11.2005 möglich

Aufgabe 9:
Zeichne mit `DSTOOL` `MATLAB` o.ä. die Lösungskurven der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2}x + y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}xy \end{aligned}$$

zu den Anfangsbedingungen $(x, y) = (1, -1.07)$ und $(x, y) = (1, -1.08)$.
Erkläre, warum sich die Trajektorien so unterschiedlich verhalten, obwohl die Anfangsbedingungen fast identisch sind, und Lösungen doch stetig von den Anfangsbedingungen abhängen.

Aufgabe 10:
Bestimme mit Hilfe einer Zentrumsmannigfaltigkeit die Stabilität der nicht-hyperbolischen Ruhelage $x = y = 0$ von

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy \\ \dot{y} &= = -y + \alpha x^2. \end{aligned}$$

Benutze zunächst die Invarianz der Zentrumsmannigfaltigkeit $W^c(0)$ =Graph(Ψ), um die ersten Terme in der Taylor–Entwicklung von Ψ zu bestimmen.

Aufgabe 11: Nichteindeutigkeit der Zentrumsmannigfaltigkeit
Betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned}$$

Für beliebige C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$ sei

$$\Psi(x) = \begin{cases} C_1\, e^{1/x} & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ C_2\, e^{-1/x} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Zeige:

(i) $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R})$,

(ii) Die Menge $M := \{(x, y);\ y = \Psi(x)\}$ ist für jedes feste Paar (C_1, C_2) eine invariante Mannigfaltigkeit für den Fluss der Differentialgleichung,

(iii) M ist tangential an den Zentrums–Eigenraum im nicht–hyperbolischen Gleichgewicht $x = y = 0$.

Aufgabe 12:
Zeige, dass die (analytische) Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^3 \\ \dot{y} &= = 2y - 2x^2 \end{aligned}$$

keine analytische Zentrumsmannigfaltigkeit besitzt.