

4. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG DYNAMISCHE SYSTEME II

ABGABE BIS 18.11.2005 MÖGLICH

Aufgabe 13: Pitchfork-Verzweigung

Betrachte das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= \lambda y + xy - y^3 \\ \dot{\lambda} &= 0.\end{aligned}$$

Bestimme die Taylor-Entwicklung der Zentrumsmanigfaltigkeit so weit, dass Du Aussagen über den Fluss auf der Zentrumsmanigfaltigkeit nahe $x = y = \lambda = 0$ machen kannst, insbesondere über alle Gleichgewichte und deren Stabilität.

Aufgabe 14:

Betrachte zwei gekoppelte nichtlineare Pendel

$$\begin{aligned}\ddot{x} + x - 3y + xy^2 &= 0 \\ \ddot{y} + y - 3x + x^2y &= 0.\end{aligned}$$

Zeige, dass eine zweidimensionale Zentrumsmanigfaltigkeit zur Ruhelage $x = \dot{x} = y = \dot{y}$ existiert und bestimme deren Taylor-Entwicklung bis zu Termen quadratischer Ordnung.

Kannst Du (evtl. mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen) die Dynamik auf dieser Zentrumsmanigfaltigkeit beschreiben?

Aufgabe 15:

Sei $H_2(\mathbb{R}^2)$ der Raum der Monome vom Grad 2 in 2 Variablen x, y , also

$$H_2(\mathbb{R}^2) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\}$$

Bestimme speziell für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ das Bild $\text{ad } A(H_2(\mathbb{R}^2))$.

Aufgabe 15:

Gib die Normalform 2. Ordnung an für eine Differentialgleichung an, deren Linearteil von der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ist. Betrachte dabei die Fälle $\lambda = 0$, $\lambda = 2$, $\lambda = 1/2$ und $\lambda \notin \{0, 1/2, 2\}$.