J. Härterich, C. Pfrang
FU Berlin
Wintersemester 2005/06

4. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamische Systeme II

Abgabe bis 18.11.2005 möglich

Aufgabe 13: Pitchfork-Verzweigung
Betrachte das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + x^2 - y^2\\ \dot{y} &= \lambda y + xy - y^3\\ \dot{\lambda} &= 0.\end{aligned}$$

Bestimme die Taylor-Entwicklung der Zentrumsmannigfaltigkeit so weit, dass Du Aussagen über den Fluss auf der Zentrumsmannigfaltigkeit nahe $x = y = \lambda = 0$ machen kannst, insbesondere über alle Gleichgewichte und deren Stabilität.

Aufgabe 14:
Betrachte zwei gekoppelte nichtlineare Pendel

$$\begin{aligned}\ddot{x} + x - 3y + xy^2 &= 0\\ \ddot{y} + y - 3x + x^2y &= 0.\end{aligned}$$

Zeige, dass eine zweidimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit zur Ruhelage $x = \dot{x} = y = \dot{y}$ existiert und bestimme deren Taylor-Entwicklung bis zu Termen quadratischer Ordnung.
Kannst Du (evtl. mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen) die Dynamik auf dieser Zentrumsmannigfaltigkeit beschreiben ?

Aufgabe 15:
Sei $H_2(\mathbb{R}^2)$ der Raum der Monome vom Grad 2 in 2 Variablen x, y, also

$$H_2(\mathbb{R}^2) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}x^2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}xy\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y^2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\x^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\xy\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\y^2\end{pmatrix}\right\}$$

Bestimme speziell für die Matrix $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ das Bild ad $A(H_2(\mathbb{R}^2))$.

Aufgabe 15:
Gib die Normalform 2. Ordnung an für eine Differentialgleichung an, deren Linearteil von der Form

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

ist. Betrachte dabei die Fälle $\lambda = 0$, $\lambda = 2$, $\lambda = 1/2$ und $\lambda \notin \{0,\, 1/2,\, 2\}$.