J. Harterich, C. Pfrang
FU Berlin
Wintersemester 2005/06

5. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamische Systeme II

Abgabe bis 25.11.2005 möglich

Aufgabe 17:
Sei A eine $n \times n$-Matrix und $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei eine Abbildung $h_t \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$h_t(x) := e^{-At} h(e^{At} x).$$

Zeige:

(i) $(\operatorname{ad} A) \cdot h_t(x) = ((\operatorname{ad} A) \cdot h)_t(x) = -\frac{d}{dt} h_t(x)$

(ii) $\mathcal{N}(\operatorname{ad} A) = \{h \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \; ; \; h_t = h \;\; \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 18:
Zeige, dass die Normalform eines Vektorfelds mit Linearteil

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

von der Form

$$\begin{aligned} P_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 Q_1(x_1, y) \\ P_2(x_1, x_2, x_3) &= x_2 Q_1(x_1, y) + x_1 Q_2(x_1, y) \\ P_3(x_1, x_2, x_3) &= x_3 Q_1(x_1, y) + x_2 Q_2(x_1, y) + Q_3(x_1, y) \end{aligned}$$

ist, wobei $y = x_2^2 - 2x_1 x_3$.
Tipp: Benutze als Variablen x_1, x_2 und y.

Aufgabe 19: Normalform mit Symmetrie
Betrachte eine Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie, d.h. es gelte $f(-x) = -f(x)$ für alle x. Zeige, dass man die Normalformtransformation so wählen kann, dass auch die Normalform symmetrisch ist.

Aufgabe 20: Verzweigung in Polarkoordinaten
Schreibe die für $(x, y) \neq (0, 0)$ definierte Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x - \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - x(x^2 + y^2 - 1)^2 \\ \dot{y} &= \lambda y + \frac{x^3}{x^2 + y^2} - y(x^2 + y^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

in Polarkoordinaten und untersuche für $\lambda \in \mathbb{R}$ auf periodische Orbits.