

## 6. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG DYNAMISCHE SYSTEME II

ABGABE BIS 2.12.2005 MÖGLICH

### Aufgabe 21:

Diskutiere das Vektorfeld der „Cusp–Verzweigung“

$$\dot{x} = x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimme dabei insbesondere die Zahl der Gleichgewichte für alle  $\lambda$  und die Kurven in der  $(\lambda_1, \lambda_2)$ -Ebene, bei deren Überqueren Saddle–Node–Verzweigungen auftreten.

Untersuche außerdem die Stabilität der auftretenden Gleichgewichte.

### Aufgabe 22: Entfaltung der transkritischen Verzweigung

Betrachte die Modifikation der transkritischen Verzweigung

$$\dot{x} = \lambda x - x^2 + \alpha$$

mit einem zusätzlichen Parameter  $\alpha$  nahe 0.

- (i) Zeichne für verschiedene  $\alpha$  die Verzweigungsdiagramme.
- (ii) Skizziere die Fläche der Gleichgewichtslösungen  $x = x(\lambda, \alpha)$ .
- (iii) In welchen Bereichen der  $(\lambda, \alpha)$ -Ebene ist die Anzahl der Gleichgewichtslösungen konstant?

### Aufgabe 23:

Sei  $A(\mu)$  eine reelle  $n \times n$ -Matrix, die von einem Parameter  $\mu$  abhängt, und die zwei einfachen Eigenwerte  $\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$  besitzt mit  $\alpha(0) = 0$  und  $\omega(0) = 1$ .

Zeige, dass

$$\alpha'(0) = \operatorname{Re}(\ell^T A'(0)r)$$

wobei  $\ell^T, r \in \mathbb{C}^n$  linke und rechte Eigenvektoren von  $A(0)$  zum eigenwert  $i$  sind, d.h.

$$A(0)r = ir, \quad \ell^T A(0) = i\ell^T, \quad (p, q) = 1$$

erfüllen.

### Aufgabe 24:

Die FitzHugh-Nagumo-Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{v} &= f(v + v_0) - f(v_0) - w \\ \dot{w} &= \varepsilon(v - \gamma w) \end{aligned}$$

ist ein (vereinfachtes) Modell zur Nervenreizleitung. Dabei ist

$$f(v) = v(v - \alpha)(1 - v),$$

mit  $0 < \alpha < 1$  und  $\varepsilon \ll 1$ , (i) Zeichne das Phasenportrait mit Hilfe von DSTOOL etc. für  $\alpha = 0.139$ ,  $\varepsilon = 0.008$ ,  $\gamma = 2.54$  und die beiden Werte  $v_0 = 0.07$  bzw.  $v_0 = 0.15$ . zeichne außerdem das  $v$ - $t$ -Diagramm und erläutere das unterschiedliche Verhalten.

(ii) Seien nun  $\gamma, v_0$  und  $\varepsilon > 0$  fest. Berechne in Abhängigkeit von  $\alpha \in (0, 1)$  die Eigenwerte der Linearisierung in  $(0, 0)$ . Was ist also zu erwarten ?

*Freiwillig:* Beweise Deine Vermutungen.