J. Härterich, C. Pfrang
FU Berlin
Wintersemester 2005/06

6. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamische Systeme II

Abgabe bis 2.12.2005 möglich

Aufgabe 21:
Diskutiere das Vektorfeld der „Cusp–Verzweigung“

$$\dot{x} = x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2, \quad x \in \mathbb{R},\ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimme dabei insbesondere die Zahl der Gleichgewichte für alle λ und die Kurven in der (λ_1, λ_2)–Ebene, bei deren Überqueren Saddle–Node–Verzweigungen auftreten.
Untersuche außerdem die Stabilität der auftretenden Gleichgewichte.

Aufgabe 22: Entfaltung der transkritischen Verzweigung
Betrachte die Modifikation der transkritischen Verzweigung

$$\dot{x} = \lambda x - x^2 + \alpha$$

mit einem zusätzlichen Parameter α nahe 0.

(i) Zeichne für verschiedene α die Verzweigungsdiagramme.

(ii) Skizziere die Fläche der Gleichgewichtslösungen $x = x(\lambda, \alpha)$.

(iii) In welchen Bereichen der (λ, α)-Ebene ist die Anzahl der Gleichgewichtslösungen konstant?

Aufgabe 23:
Sei $A(\mu)$ eine reelle $n \times n$-Matrix, die von einem Parameter μ abhängt, und die zwei einfachen Eigenwerte $\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$ besitzt mit $\alpha(0) = 0$ und $\omega(0) = 1$.
Zeige, dass

$$\alpha'(0) = \mathrm{Re}(\ell^T A'(0) r)$$

wobei ℓ^T, $r \in \mathbb{C}^n$ linke und rechte Eigenvektoren von $A(0)$ zum eigenwert i sind, d.h.

$$A(0)r = ir, \quad \ell^T A(0) = i\ell^T, \quad (p, q) = 1$$

erfüllen.

Aufgabe 24:
Die FitzHugh-Nagumo-Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{v} &= f(v + v_0) - f(v_0) - w \\ \dot{w} &= \varepsilon(v - \gamma w) \end{aligned}$$

ist ein (vereinfachtes) Modell zur Nervenreizleitung. Dabei ist

$$f(v) = v(v - \alpha)(1 - v),$$

mit $0 < \alpha < 1$ und $\varepsilon \ll 1$, (i) Zeichne das Phasenportrait mit Hilfe von DSTOOL etc. für $\alpha = 0.139$, $\varepsilon = 0.008$, $\gamma = 2.54$ und die beiden Werte $v_0 = 0.07$ bzw. $v_0 = 0.15$. zeichne außerdem das v-t-Diagramm und erläutere das unterschiedliche Verhalten.
(ii) Seien nun γ, v_0 und $\varepsilon > 0$ fest. Berechne in Abhängigkeit von $\alpha \in (0, 1)$ die Eigenwerte der Linearisierung in $(0, 0)$. Was ist also zu erwarten ?
Freiwillig: Beweise Deine Vermutungen.