J. Härterich, C. Pfrang
FU Berlin
Wintersemester 2005/06

7. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamische Systeme II

Abgabe bis 9.12.2005 möglich

Aufgabe 25:
Betrachte eine Familie $x_{n+1} = F(x_n, \lambda)$ von diskreten dynamischen Systemen. Für jedes feste $\lambda \in \mathbb{R}$ sei die Abbildung $x \mapsto F(x, \lambda)$ ein C^2-Diffeomorphismus.

(i) Wann lässt sich ein Fixpunkt (x_0, λ_0) mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen lokal eindeutig fortsetzen zu einer Kurve von Fixpunkten $x = x_*(\lambda)$ mit $x_*(\lambda_0) = x_0$?

(ii) Formuliere Sätze für die Saddle-Node-Verzweigung und die transkritische Verzweigung von Fixpunkten. Betrachte dazu die reduzierte Gleichung auf der Zentrumsmannigfaltigkeit.

(iii) Warum heißt die Saddle-Node-Verzweigung von Fixpunkten in der anglo-amerikanischen Literatur auch „tangent bifurcation“ ?

Aufgabe 26:
Überlege Dir eine Differentialgleichung im $\mathbb{R}^2$, die von einem Parameter λ abhängt, so dass für $\lambda < 0$ *keine* periodischen Orbits existieren und für $\lambda > 0$ *genau zwei* periodische Orbits, die für kleine λ beide in einer kleinen Umgebung des Ursprungs liegen.

Aufgabe 27:
Die Modellierung einer chemischen Reaktion

$$\begin{aligned} P &\xrightarrow{k_1} A \\ A &\xrightarrow{k_2} B + \text{Wärme} \end{aligned}$$

mit Reaktionsraten k_1 und $k_2 = k_2(T) = e^{-E/RT}$ in einem Wärmebad der Temperatur T_0 führt nach einigen Vereinfachungen auf die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \mu - kae^{-\theta} \\ \dot{\theta} &= ae^{-\theta} - \theta \end{aligned}$$

für die Konzentration a von A und die skalierte Temperaturdifferenz $\theta = \frac{E(T-T_0)}{RT_0^2}$.
Zeige, dass für hinreichend kleines k Parameterwerte $\mu_- \in \mathbb{R}$ and $\mu_+ \in \mathbb{R}$ existieren, so dass bei $\mu_\pm$ eine Hopf-Verzweigung auftritt.
Achtung: $\mu_\pm$ lassen sich i.a. nicht explizit angeben.

Aufgabe 28:
Untersuche mit DSTOOL das Phasenportrait der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x - y + xy^2 - x^5 - xy^4 \\ \dot{x} &= x + \lambda y + xy + y^3 - x^4 y - y^5 \end{aligned}$$

für $\lambda \in [-1, 1]$. Betrachte insbesondere Trajektorien mit Anfangswert $x_0 = 0.2$, $y_0 = 0$ für $\lambda = -0.1$ und für $\lambda = +0.1$. Erkläre das unterschiedliche Verhalten.
Zeichne außerdem ein schematisches Verzweigungsdiagramm für die periodischen Orbits.