# 1 Einleitung und Beispiele

## 1.1 Dynamische Systeme

In diesem Kapitel werden wir einige Grundbegriffe bereitstellen. Zum Teil handelt es sich um eine Wiederholung der Vorlesung "Einführung in die Dynamischen Systeme" vom vergangenen Semester.

**Definition:** Ein **dynamisches System** besteht aus einer Menge $X$, dem sogenannten **Phasenraum**, einer Gruppe $G = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{Z}$, und einer Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : G \times X &\to X \\ (t, x) &\mapsto \Phi(t, x) =: \Phi_t(x), \end{aligned}$$

mit

(i) $\Phi(0, x) = x$ für alle $x \in X$ und

(ii) $\Phi_t \circ \Phi_s(x) = \Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x) = \Phi_{t+s}(x)$ für alle $s, t \in G$ und alle $x \in X$.

(iii) Für festes $t$ ist die Abbildung $x \mapsto \Phi(t, x)$ ein Diffeomorphismus, d.h. $\Phi_t$ ist invertierbar und sowohl $\Phi_t$ als auch $\Phi_t^{-1}$ sind differenzierbar.

Im Fall $G = \mathbb{R}$ spricht man von einem **kontinuierlichen dynamischen System** und nennt $\Phi_t$ den **(Phasen-)Fluss**.
Für $G = \mathbb{Z}$ nennt man das Ganze ein **diskretes dynamisches System**.

Wegen Eigenschaft (ii) ist

$$\Phi_m = \underbrace{\Phi_1 \circ \Phi_1 \circ \ldots \circ \Phi_1}_{m-\text{mal}} =: \Phi_1^m,$$

d.h. für $m \in \mathbb{N}$ ist ein diskretes dynamisches System durch eine einzige Abbildung $\Phi_1$ festgelegt.
Falls $\Phi_1$ invertierbar ist, dann gilt außerdem

$$\Phi_{-m} = (\Phi_m)^{-1} = (\Phi_1)^{-m}.$$

Wir interpretieren $t \in G$ immer als "Zeit", d.h. $t > 0$ entspricht der Zukunft, negative $t$ beschreiben die Vergangenheit. $\Phi$ beschreibt, wie sich das dynamische System im Lauf der Zeit verändert.

Ein Dynamisches System ist also ein mathematisches Objekt, dessen zeitliche Evolution von seinem aktuellen Zustand und einem deterministischen „Naturgesetz" vollständig festgelegt ist.

Gelegentlich werden wir auch Abbildungen $\Phi$ betrachten, die nicht invertierbar sind. Dann ist $G = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ nur eine **Halbgruppe**.
Der Phasenraum $X$ ist im allgemeinen mindestens ein metrischer Raum. Fast immer wird $X$ jedoch eine (Riemannsche) Mannigfaltigkeit sein, z.B. $\mathbb{R}^n$, das Intervall $[0, 1]$, die Kreislinie $S^1$, die Kugeloberfläche $S^2$ oder der Torus $\mathbb{T}^2$.

**Definition:** Die Menge
$$\gamma(x_0) := \{\Phi_t(x_0);\ t \in G\} \subseteq X$$
heißt **Orbit** von $x_0$ (oder **Trajektorie** von $x_0$).
Lassen wir nur positive $t$ zu, dann erhalten wir den **Vorwärtsorbit**
$$\gamma_+(x_0) := \{\Phi_t(x_0);\ t \in G \cap \mathbb{R}^+\}.$$
Analog heißt
$$\gamma_-(x_0) := \{\Phi_t(x_0);\ t \in G \cap \mathbb{R}^-\}$$
der **Rückwärtsorbit** von $x_0$.

## 1.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Kontinuierliche dynamische Systeme werden oft von gewöhnlichen Differentialgleichungen
$$\dot{x} = f(t,x), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$
erzeugt. In diesem Fall ist $\Phi_t(x_0)$ die Lösung zur Zeit $t$ der Differentialgleichung mit Anfangswert $x(0) = x_0$. Dass diese Lösung im allgemeinen, zumindest für $|t|$ klein genug, existiert und eindeutig ist, besagt der **Satz von Picard–Lindelöf**:

**Satz 1.1 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit)** *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in einer Umgebung von $x_0$ gleichmäßig Lipschitz-stetig. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass das Anfangswertproblem*
$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$
*für $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ eine eindeutige Lösung $x(t)$ hat.*

**Bemerkung:** Ein analoger Satz gilt für nicht-autonome Differentialgleichungen
$$\dot{x} = f(t,x)$$
unter der Voraussetzung, dass $f$ stetig in $t$ und lokal Lipschitz-stetig in $x$ ist.

Falls $f$ sogar stetig differenzierbar ist und $\|f(x)\| \leq M|x|$ für eine Konstante $M$ und alle $x \in X$, dann kann man die Lösung immer weiter fortsetzen und die Differentialgleichung erzeugt einen Fluss $\Phi$. Dieser Fluss ist dann so glatt wie das Vektorfeld $f$.
Der Zusammenhang zwischen Flüssen und Differentialgleichungen fassen wir in einem Satz zusammen:

**Satz 1.2 (Fluss und Vektorfeld)**

*(i) Sei $\Phi$ ein stetig differenzierbarer Fluss auf $X$ und $x_0 \in X$. Dann ist der Orbit $x(t) = \Phi_t(x_0)$ eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung*
$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$
*mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ zum Vektorfeld*
$$f(x) := \frac{\partial}{\partial t}\, \Phi(t,x)\big|_{t=0}.$$

*(ii) Sei $f \in BC^k(X,X)$ ein Vektorfeld. Dann existiert die Lösung $x(t;x_0)$ des Anfangswertproblems*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

*für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ und durch $\Phi_t(x_0) := x(t;x_0)$ wird ein Fluss $\Phi \in C^k(\mathbb{R} \times X, X)$ definiert.*

## 1.3 Grundbegriffe der Dynamik

**Definition:** Sei $\Phi$ ein kontinuierliches dynamisches System auf dem Phasenraum $X$.

(i) Ein Punkt $x_0$ heißt **Ruhelage** (oder **Gleichgewicht** oder **stationärer Punkt**), falls $\gamma(x_0) := \{x_0\}$, d.h. falls $\Phi_t(x_0) = x_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Ein Punkt $x_0$ heißt **periodischer Punkt** mit (minimaler) Periode $p > 0$, falls $\Phi_p(x_0) = x_0$ und $\Phi_p(x_0) \neq x_0$ für alle $t \in (0,p)$. Der zugehörige Orbit heißt **periodischer Orbit**.

(iii) Ein Orbit $\gamma(x_0)$ heißt **heterokliner Orbit**, falls es zwei Gleichgewichte $x_-$ und $x_+$ gibt, so dass

$$\lim_{t \to -\infty} \Phi_t(x_0) = x_- \quad \text{und} \quad \lim_{t \to +\infty} \Phi_t(x_0) = x_+.$$

Falls $x_- = x_+$, dann sprechen wir von einem **homoklinen Orbit**.

Analoge Definitionen gelten für diskrete dynamische Systeme, allerdings heißen hier Punkte mit $\gamma(x_0) := \{x_0\}$ **Fixpunkte**.

**Beispiel:** Bevölkerungswachstum
Im Jahr 1798 modellierte Malthus die Entwicklung der Bevölkerungszahl $N$ durch eine gewöhnliche Differentialgleichung.
Ausgehend von der Annahme

$$\text{Änderung der Bevölkerungszahl} = \text{Geburten} - \text{Sterbefälle}$$

(Migration spielte 1798 noch keine Rolle) kam er zu der Gleichung

$$\dot{N} = gN - sN$$

indem er voraussetzte, dass die Anzahl der Geburten und der Sterbefälle proportional zu $N$ ist. Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$N(t) = N(0) \cdot e^{(g-s)t}.$$

Für $g-s > 0$ tritt also eine Bevölkerungsexplosion ein, für $g-s < 0$ stirbt die Bevölkerung aus.
Da das unbegrenzte Wachstum bei begrenzten Ressourcen nicht realistisch ist, wurde von Verhulst 1838 als verbessertes Modell die Gleichung

$$\dot{N} = \alpha N - \beta N^2$$

vorgeschlagen. Für kleines $N$ wächst die Bevölkerungsanzahl fast wie in Malthus Modell, es tritt dann allerdings eine Sättigung ein, und alle Lösungen konvergieren zum Fixpunkt $N_* = \frac{\alpha}{\beta}$.
Man kann die Bevölkerungsentwicklung auch durch ein diskretes dynamisches System modellieren, indem man die Bevölkerungszahl $N_k$ im Jahr $k$ betrachtet. Analog zu Malthus Modell, ergibt sich dann die Differenzengleichung

$$N_{k+1} = N_k + \tilde{g}N_k - \tilde{s}N_k =: \alpha N_k$$

mit der Lösung

$$N_k = \alpha^k N_0$$

was für $\alpha > 1$ wieder zu Bevölkerungsexplosion und für $\alpha < 1$ zum Aussterben führt.
Auch zum Modell von Verhulst gibt es ein diskretes Analogon, dieses betrachten wir allerdings erst etwas später.

## 1.4 Asymptotisches Verhalten, Stabilität und Rekurrenz

Von besonderem Interesse sind immer Teilmengen von $X$, die ein dynamisches System in sich selbst abbildet.

**Definition:** Sei $\Phi$ ein dynamisches System auf dem Phasenraum $X$. Eine Menge $M \subseteq X$ heißt **positiv invariant**, falls $\Phi_t(M) \subseteq M$ für alle $t \in G$ mit $t \geq 0$. Analog heißt $M$ **negativ invariant**, falls $\Phi_t(M) \subseteq M$ für alle $t \in G$ mit $t \leq 0$. Falls $\Phi_t(M) \subseteq M$ für alle $t \in G$, dann nennen wir die Menge **invariant**.

**Definition:** Sei $\Phi_t$ ein Fluss auf einem metrischen Raum $X$ und $M \subseteq X$ eine nichtleere, kompakte, invariante Menge. $M$ heißt **Lyapunov-stabil** oder einfach **stabil**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\text{dist}\,(x_0, M) < \delta \Rightarrow \text{dist}\,(\Phi_t(x_0), M) < \varepsilon \qquad \forall t \geq 0.$$

Die Menge $M$ heißt **asymptotisch stabil**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x_0$ mit $\text{dist}\,(x_0, M) < \varepsilon$ gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \text{dist}\,(\Phi_t(x), M) = 0.$$

Die einfachsten invarianten Mengen sind Gleichgewichte (bei kontinuierlichen dynamischen Systemen) und Fixpunkte (bei diskreten dynamischen Systemen).
Für Ruhelagen und Fixpunkte liefert die Linearisierung ein wichtiges Kriterium, um über die Frage der asymptotischen Stabilität zu entscheiden:

**Satz 1.3 (Linearisierten Stabilität, diskret)** *Betrachte das diskrete dynamische System*

$$(*) \qquad x_{n+1} = f(x_n), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

*mit stetig differenzierbarem $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $f(0) = 0$.*
*Dann gilt: Ist der Fixpunkt $x = 0$ asymptotisch stabil für die linearisierte Gleichung*

$$x_{n+1} = Df(0)x_n,$$

*so ist $x = 0$ auch asymptotisch stabil für $(*)$.*
*Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $Df(0)$ im Innern des komplexen Einheitskreises $\{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ liegen.*

Der analoge Satz für Ruhelagen von kontinuierlichen dynamischen Systemen lautet:

**Satz 1.4 (Prinzip der linearisierten Stabilität)** *Betrachte die autonome Differentialgleichung*

$$(*) \qquad \dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

*Dabei sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $f(0) = 0$. Dann gilt: Ist die Ruhelage $x = 0$ asymptotisch stabil für die linearisierte Gleichung*

$$\dot{x} = Df(0)x,$$

*so ist $x = 0$ auch asymptotisch stabil für $(*)$.*
*Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $Df(0)$ in der linken komplexen Halbebene $\{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, z < 0\}$ liegen.*

**Beispiel:** Logistische Abbildung
Wir betrachten nun eine diskrete Version von Verhulsts Populationsmodell: Sorgt man mit einem quadratischen Term dafür, dass das Wachstum beschränkt wird, erhält man die **logistische Abbildung**

$$N_{k+1} = \lambda N_k(1 - N_k) =: f_\lambda(N_k),$$

deren Verhalten sich völlig von der kontinuierlichen Version unterscheidet.

Man beachte, dass die Abbildung auf der rechten Seite nicht invertierbar ist, wir können daher nur Vorwärtsiterierte betrachten.
Für verschiedene Werte von $\lambda$ kann man ein sehr unterschiedliches Verhalten beobachten.
**$0 \leq \lambda < 1$:**
In diesem Fall ist $f_\lambda(N) < N$, die Folge $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und konvergiert für alle Anfangswerte $N_0$ gegen den Fixpunkt $N = 0$. Die Stabilität dieses Fixpunkts ergibt sich auch aus dem Prinzip der linearisierten Stabilität, da $|f_\lambda'(0)| = \lambda < 1$. Genauso sieht man auch,dass dieser Fixpunkt für $\lambda > 1$ instabil ist.
**$1 < \lambda < 2$:**
Die Abbildung $f_\lambda$ hat für alle $\lambda$ zwei Fixpunkt $x = 0$ und $x_* = x_*(\lambda) = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, die für $\lambda = 1$ zusammenfallen. Bei diesem Überkreuzen der Fixpunkte wechselt die Stabilität. Alle Trajektorien mit $N_0 \neq 0$ konvergieren gegen $x_*$. Der alte Fixpunkt $N = 0$ existiert weiter, er ist aber instabil und daher "unsichtbar". Ein solcher Stabilitätswechsel heißt **transkritische Verzweigung**.
**$2 < \lambda < 3$:**
Der Fixpunkt $N_*(\lambda)$ ist immer noch stabil, allerdings ist $f_\lambda'(x_*) = 2 - \lambda < 0$. Daher ist die Konvergenz oszillatorisch, die Iterierten $N_n$ sind abwechselnd kleiner und größer als $N_*$.

**$3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$:**
Wie man nachrechnet wird bei $\lambda = 3$ auch der Fixpunkt $N_*$ instabil, da $f'_\lambda(N_*) = \lambda(1 - 2N_*) < -1$. Betrachtet man die Gleichung für 2-periodische Punkte

$$f_\lambda^2(x) = x \iff N(\lambda - 1 - \lambda N)(\lambda^2 N^2 - \lambda^2 N - \lambda N \lambda + 1) = 0,$$

so treten für $\lambda = \lambda_1 > 3$ zwei neue Lösungen

$$N_\pm = \frac{\lambda + 1 \pm \sqrt{(\lambda - 1)^2 - 4}}{2\lambda}$$

auf. Diese werden von $f_\lambda$ aufeinander abgebildet, es handelt sich also tatsächlich um einen 2-periodischen Orbit. Es ist natürlich kein Zufall, dass die neuen periodischen Lösungen gerade dann auftreten, wenn der Fixpunkt instabil wird. Wieder ist eine Verzweigung verantwortlich, diesmal eine sogenannte **Periodenverdopplung**.
Um die Stabilität des 2-periodischen Orbits zu bestimmen, berechnen wir

$$(f_\lambda \circ f_\lambda)'(N_\pm) = f'_\lambda(N_-) f'_\lambda(N_+) = (-1 + \sqrt{(\lambda - 1)^2 - 4})(-1 - \sqrt{(\lambda - 1)^2 - 4})$$

Man sieht nun, dass $(f_\lambda^2)'(N_\pm) < -1$ für $\lambda > \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$. Bei $\lambda = 1 + \sqrt{6}$ entsteht ein stabiler 4-periodischer Orbit, während der 2-periodische Orbit instabil wird. Für wachsendes $\lambda$ gibt es eine unendliche Folge weiterer solcher Periodenverdopplungen bei Parameterwerten $\lambda_3, \lambda_4, \ldots$, die immer dichter beieinander liegen. Für $\lambda \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}]$ existiert dann genau ein stabiler $2^n$-periodischer Orbit und instabile $2^m$-periodische Orbits für $m = 0, 1, \ldots, n - 1$.
Feigenbaum hat beobachtet, dass das Verhältnis $\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$ gegen die **Feigenbaum-Konstante** $\delta = 4,69920166...$ konvergiert. Diese Konstante tritt nicht nur bei der logistischen Abbildung auf, sie ist eine universelle Größe, die ganz allgemein bei Periodenverdopplungs-Kaskaden eine Rolle spielt.
Da die Periodenverdopplungen in etwa einer geometrischen Folge entsprechen, existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 3.\ 5699456....$ Zwischen diesem Wert und $\lambda = 4$ findet man weite Bereiche, in denen die Trajektorien chaotisch aussehen, aber auch Bereiche mit einfacher Struktur, zum Beispiel 3-periodische Orbits.

Sehr wichtig für die Beschreibung der Langzeit-Dynamik ist die Menge der Häufungspunkte des Vorwärtsorbits, d.h. die Menge jener Punkte in deren Umgebung die Trajektorie immer wieder kommt.

**Definition:** Wir nennen

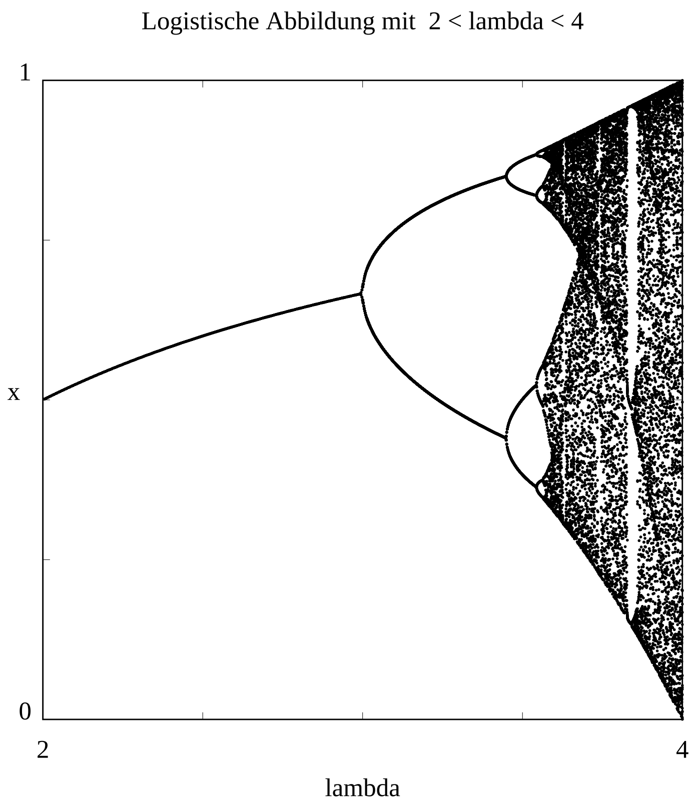
$$\omega(x_0) := \{y \in X,\ \exists t_n \nearrow +\infty, y = \lim_{n\to\infty} \Phi_{t_n}(x_0)\} = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_+(\Phi_t(x_0))}$$

die **$\omega$-Limesmenge** von $x_0$. Ganz analog nennen wir

$$\alpha(x_0) := \{y \in X,\ \exists t_n \searrow -\infty, y = \lim_{n\to\infty} \Phi_{t_n}(x_0)\} = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\gamma_-(\Phi_t(x_0))}$$

die **$\alpha$-Limesmenge** von $x_0$. Hierbei bezeichnet $\overline{M}$ den Abschluss einer Menge $M$.

Es spielt dabei keine Rolle, ob es sich um ein diskretes ($t \in \mathbb{Z}$) oder ein kontinuierliches dynamisches System ($t \in \mathbb{R}$) handelt.
Die wichtigsten Eigenschaften der $\omega$–Limesmenge:




**Satz 1.5** *Sei der Vorwärtsorbit $\gamma_+(x_0)$ beschränkt. Dann ist $\omega(x_0)$*

*(i) nichtleer,*

*(ii) kompakt und*

*(iii) invariant.*

*(iv) Bei kontinuierliche dynamischen Systemen ist $\omega(x)$ außerdem zusammenhängend.*

*Dasselbe gilt für $\alpha(x_0)$, falls der Rückwärtsorbit $\gamma_-(x_0)$ beschränkt ist.*

**Beispiel:** Räuber-Beute-Systeme
Volterra und Lotka

$$\begin{aligned}\dot{B} &= B(\lambda - cR)\\ \dot{R} &= R(-\mu + dB)\end{aligned}$$

Man kann leicht nachrechnen, dass

$$I(B,R) = dB - \mu \log B + cR - \lambda \log R$$

eine Erhaltungsgröße ist, d.h. längs Trajektorien konstant bleibt.
Etwas realistischere Modelle berücksichtigen

- das begrenzte Wachstum der einzelnen Spezies
- einen Sättigungseffekt beim Raubterm, da die Räuber von einem Überangebot an Beute nicht unbegrenzt profitieren

Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} \dot{B} &= BF(B,R) \\ \dot{R} &= RG(B,R) \end{aligned}$$

stellt man sicher, dass der positive Quadrant $\{(B,R); B > 0,\ R > 0\}$ positiv und negativ invariant ist. Eine Möglichkeit:

$$\begin{aligned} \dot{B} &= \alpha B \left(1 - \frac{N}{\beta}\right) - \gamma \frac{BR}{B-D} \\ \dot{R} &= \mu R \left(1 - \frac{N}{\nu}\right) \end{aligned}$$

mit Parametern $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\mu$, $\nu$.

Für Flüsse im $\mathbb{R}^2$ kann man die möglichen $\omega$-Limesmengen recht genau beschreiben.

**Satz 1.6 (Satz von Poincaré-Bendixson)** *Sei $\gamma_+(x_0)$ beschränkt. Dann gilt die folgende Alternative: Entweder ist*
*(i) $\omega(x_0)$ ein periodischer Orbit oder*
*(ii) für jedes $y \in \omega(x_0)$ bestehen $\alpha(y)$ und $\omega(y)$ nur aus Gleichgewichten.*

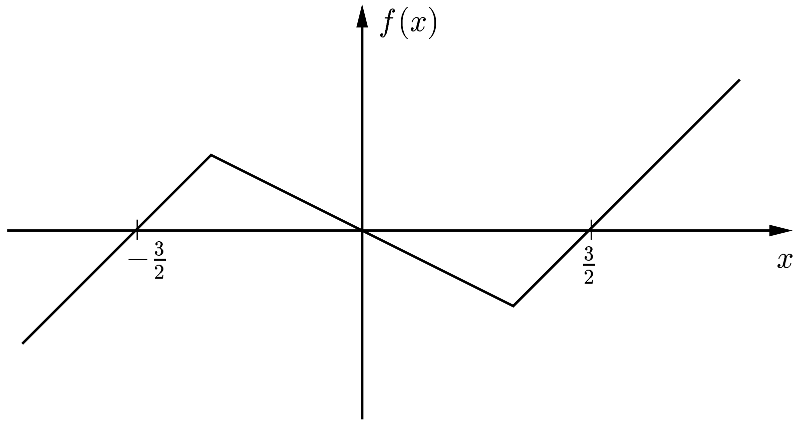
Insbesondere besagt dieser Satz, dass man "Chaos" bei autonomen Differentialgleichungen erst ab der Raumdimension 3 erwarten kann. Tatsächlich findet man im $\mathbb{R}^3$ schon viele Beispiele, die eine sehr komplizierte Dynamik haben.

**Beispiel:** Chuas Schaltkreis Chuas Schaltkreis ist ein einfacher elektronischer Oszillator, mit dem sich ein komplexes Verhalten erzielen lässt. Er spielt deshalb eine relativ wichtige Rolle in der experimentell orientierten Chaosforschung, weil er sich leicht realisieren und modifizieren lässt.
Das mathematische Modell besteht in dimensionsloser Form aus drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha\,(y - f(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y \end{aligned}$$

mit einer stückweise linearen Nichtlinearität

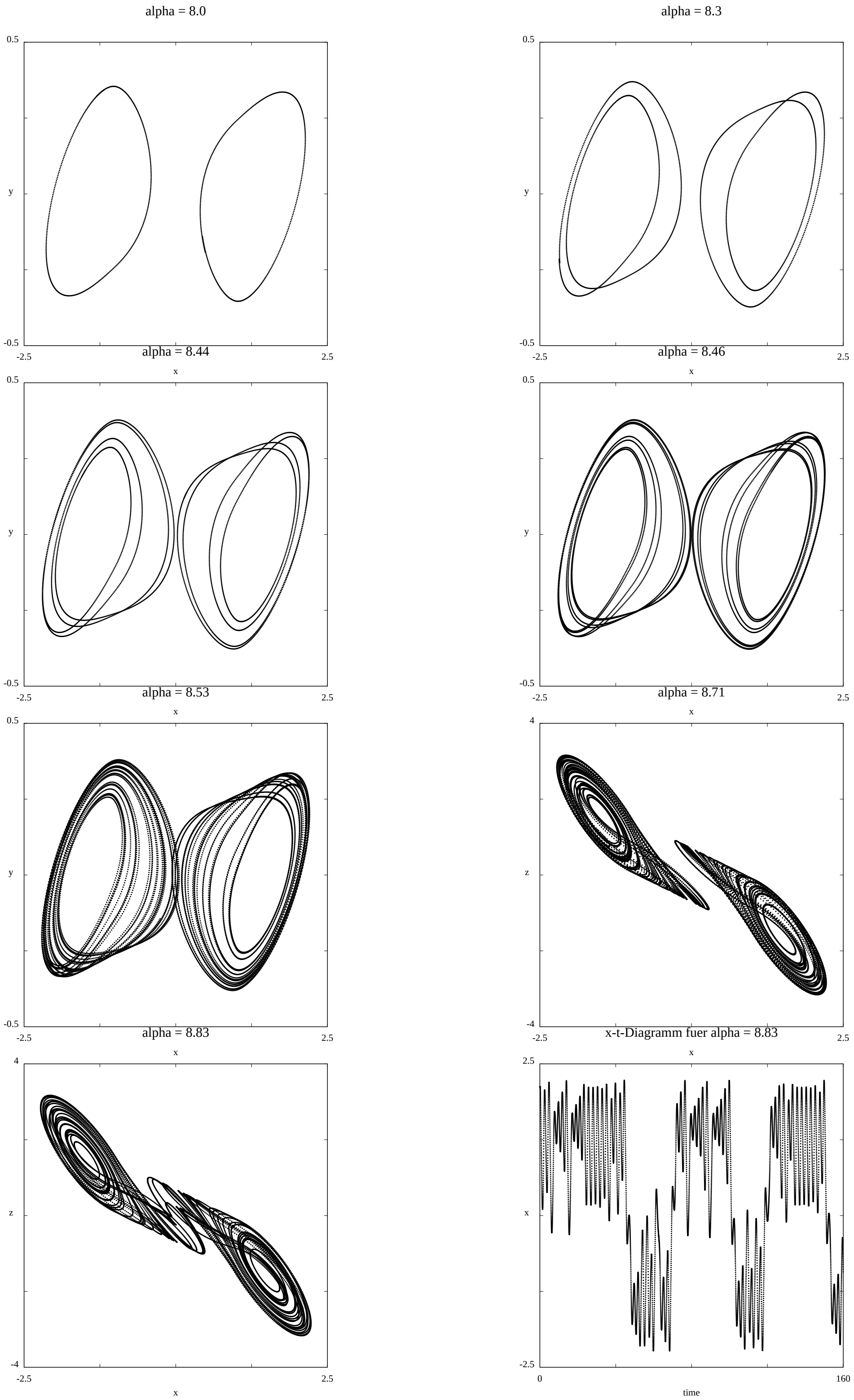
$$f(x) = \frac{2}{7}x - \frac{3}{14}\left(|x+1| - |x-1|\right).$$



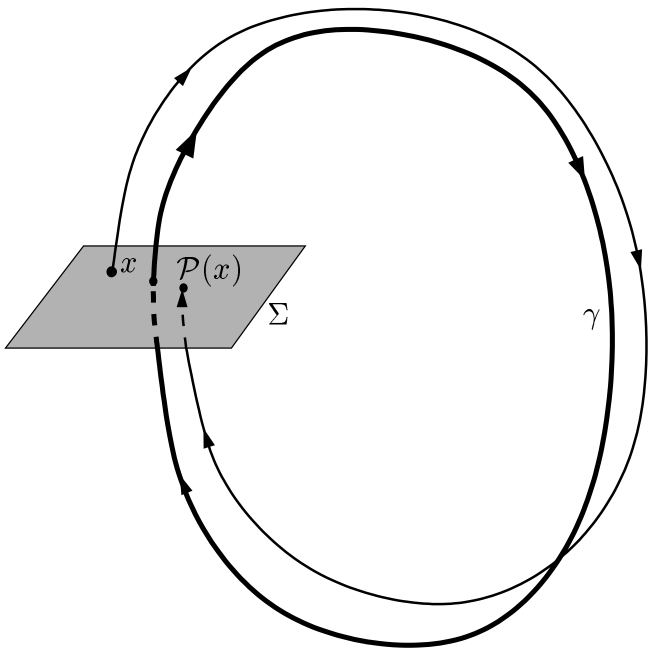

Hier haben wir es mit einem **symmetrischen** dynamischen System zu tun: Die Differentialgleichungen gehen unter der Transformation $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ in sich über. Das bedeutet jedoch nicht, dass auch alle Lösungen symmetrisch sind. Mit $(x(t), y(t), z(t))$ ist jedoch immer auch $(-x(t), -y(t), -z(t))$ eine Lösung.
Viele Phänomene lassen sich an diesem einfachen Modell beobachten. Wir erwähnen nur zwei davon:

1. Ähnlich wie bei der logistischen Abbildung kann man eine Sequenz von Periodenverdopplungen verfolgen. Bei festem $\beta = 14.3$ und $\alpha < 6.8$ besitzt das System zwei stabile Ruhelagen. Diese werden instabil bei $\alpha \approx 6.8$ und es bildet sich ein periodischer Orbit. Diese Änderung des Verhaltens nennt man **Hopfverzweigung**, wir werden darauf noch genauer zu sprechen kommen. Bei $\alpha \approx 8.18$ "verdoppelt" sich jeder dieser periodischen Orbits, das heißt es entstehen dann periodische Orbits, die zweimal umlaufen, bevor sie sich schließen. Aus diesen werden dann 4-periodische Orbits usw. bis bei etwa $\alpha \approx 8.48$ ein Paar von Attraktoren zu beobachten ist, und keine Periodizität mehr erkennbar ist.

2. Das Paar symmetrischer Attraktoren wird bei $\alpha \approx 8.82$ zu einem einzigen Attraktor, dem sogenannten "double scroll attractor". Diese Kollision eröffnet neue Möglichkeiten für die Dynamik, da die Trajektorien nun unregelmäßig zwischen den beiden Scheiben hin- und herpendeln können.




Numerisch berechnete Lösungen von Chuas Oszillator für $\beta = 14.3$ und verschiedene Werte von $\alpha$.




## 1.5 Die Poincaré–Abbildung

In der Nähe eines $p$-periodischen Orbits $\gamma$ kann man die Untersuchung eines Flusses durch die folgende Konstruktion etwas vereinfachen. Betrachte einen beliebigen Punkt $x_0$ auf dem periodischen Orbit. Dort ist dann $f(x_0) \neq 0$. Wähle eine Hyperebene $\Sigma$, die transversal zu $f(x_0)$ ist, also nicht tangential an $f(x_0)$. Beispielsweise kann man das orthogonale Komplement

$$\Sigma = \langle f(x_0) \rangle^{\perp}$$

wählen. Mit dem Satz über implizite Funktionen kann man zeigen, dass die Zeit, die eine Trajektorie vom Punkt $x_0 + \xi \in \Sigma$ braucht, um nach $\Sigma$ zurückzukehren eine differenzierbare Funktion von $\xi$ ist. In der Tat ist

$$\Phi_t(x_0 + \xi) \in \Sigma \Longleftrightarrow F(t, \xi) = \langle f(x_0), \Phi_t(x_0 + \xi) - x_0 \rangle = 0.$$

Es ist $F(p, 0) = 0$ wobei $p$ die Periode des Orbits durch $x_0$ ist. Da

$$D_t F(p, 0) = \langle f(x_0), f(\Phi_p(x_0)) \rangle = \langle f(x_0), f(x_0) \rangle \neq 0,$$

besitzt die Gleichung $F(t, \xi) = 0$ lokal eine eindeutige Lösung $t = t_*(\xi)$ und diese Lösung ist so glatt wie der Fluss $\Phi_t$ bzw. das Vektorfeld $f$.
Die **Poincaré–Abbildung** $\mathcal{P}$ ordnet jedem Punkt $x$ aus einer Umgebung von $p$ in $\Sigma$ seinen nächsten Schnittpunkt mit $\Sigma$ zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ x &\mapsto \Phi_{t_*(x)}(x) \end{aligned}$$

Von einem Fluss in $n$ Raumdimensionen gelangt man auf diese Weise zu einer Abbildung in $n-1$ Raumdimensionen. Nach dem oben Gesagten ist $\mathcal{P}$ so glatt wie der Fluss $\Phi_t$, bzw. das zugeförige Vektorfeld $f$.

Die Poincaré-Abbildung sagt auch etwas über die Stabilität des periodischen Orbits durch $x_0$ aus: Falls alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $D\mathcal{P}(0)$ vom Betrag kleiner als 1 sind, dann ist der periodische Orbit asymptotisch stabil. Falls ein Eigenwert mit Betrag größer als 1 existiert, dann ist der periodische Orbit instabil.
Die Eigenwerte von $D\mathcal{P}(0)$ hängen eng mit den Floquet-Multiplikatoren der Linearisierung

$$\dot{z} = Df(\gamma(t))z(t)$$

längs des $p$-periodischen Orbits $\gamma$ zusammen. Sei $Z(t)$ die Fundamentallösung , d.h. die Lösung der $p$-periodischen linearen Matrix-Differentialgleichung

$$\dot{Z} = Df(\gamma(t))Z(t), \quad Z(0) = \mathrm{Id}.$$

Wir wissen, dass

$$Z(t) = e^{Bt}Q(t) \quad \text{mit} \quad Q(t+p) = Q(t)$$

ist und damit $Z(p) = e^{Bp}$. Die Eigenwerte der Matrix $e^{Bp}$ sind die Floquet-Multiplikatoren. Ein Eigenwert ist immer $\lambda_1 = 1$, da

$$\dot{\gamma} = f(\gamma(t)) \implies \frac{d}{dt}\dot{\gamma} = Df(\gamma(t))\dot{\gamma}.$$

Die restlichen $n-1$ Floquet-Multiplikatoren sind gerade die $n-1$ Eigenwerte der linearierten Poincaré-Abbildung $D\mathcal{P}(0)$.
Man kann auch von diskreten dynamischen Systemen zu kontinuierlichen dynamischen Systemen übergehen, allerdings erhöht sich dabei die Dimension des Systems und der Phasenraum kann eine geometrisch komplizierte Mannigfaltigkeit sein. Aus diesem Grund begegnet man dieser Konstruktion in der Praxis äusserst selten.