

2 Invariante Mannigfaltigkeiten

Sehr viel über das Verhalten von Dynamischen Systemen kann man herausfinden, wenn man das Verhalten von Lösungen in der Nähe von Gleichgewichten versteht.

Das Modell, das einem dabei vor Augen schwebt, ist die lineare Gleichung, die man erhält, wenn man statt der nichtlinearen Gleichung

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit $f(0) = 0$ die Linearisierung

$$\dot{x} = Df(0)x$$

betrachtet. Wir ersetzen also f durch seine Taylor-Entwicklung bis zur 1. Ordnung.

Erinnern wir uns daher zunächst an Eigenschaften von Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax$$

mit einer $n \times n$ -Matrix A . Das Verhalten von Lösungen hängt hauptsächlich vom Spektrum $\sigma(A)$, d.h. von den Eigenwerten von A ab. Wir zerlegen daher den Phasenraum

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u$$

wobei E^s die Summe der verallgemeinerten Eigenräume zu allen Eigenwerten mit Realteil kleiner als Null, E^c die Summe der verallgemeinerten Eigenräume zu den Eigenwerten mit Realteil Null und E^u die Summe der verallgemeinerten Eigenräume zu allen Eigenwerten mit Realteil größer als Null ist. Dabei steht der index s für „stable“, da Lösungen mit Anfangsbedingung in E^s exponentiell schnell gegen Null konvergieren.

Seien nun

$$A^s := A|_{E^s}, \quad A^c := A|_{E^c}, \quad \text{und} \quad A^u := A|_{E^u}$$

die Einschränkungen von A auf die invarianten Unterräume, wobei A als lineare Abbildung verstanden wird.

Das Spektrum von A^s besteht dann aus allen Eigenwerten von A , deren Realteil kleiner als Null ist, etc.

Seien nun $a < 0$ und $b > 0$ so gewählt, dass gilt:

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(A^s) &\Rightarrow \operatorname{Re} \lambda < a \\ \lambda \in \sigma(A^u) &\Rightarrow \operatorname{Re} \lambda > b \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\|e^{A^s t}\| \leq K e^{at}$$

für ein $K > 0$ und alle Zeiten $t \geq 0$. Dies folgt daraus, dass alle Einträge der Matrix $e^{A^s t}$ von der Form $e^{\lambda t} P(t)$ sind, wobei λ ein Eigenwert von A^s und P ein Polynom ist. Genauso ist

$$\|e^{A^u t}\| \leq K e^{bt} \quad \text{für alle } t \leq 0.$$

Die Lösungen in E^u sind also durch ihr Verhalten für negative Zeiten charakterisiert. Für Lösungen in E^c gilt sogar

$$\|e^{A^c t}\| \leq K e^{\varepsilon t}$$

für ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$, ein $K = K(\varepsilon) > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$.

Man kann dieses Vorgehen noch etwas verallgemeinern, indem man das Spektrum von A nicht beim Realteil Null, sondern bei irgendeiner *Spektrallücke* teilt. Eine Spektrallücke bezeichnet dabei ein Intervall $[a, b]$, so dass kein Eigenwert einen Realteil im Intervall $[a, b]$ besitzt. Wie oben erhält man ebenfalls invariante Unterräume, die durch das Verhalten von Lösungen für $t \rightarrow +\infty$ oder $t \rightarrow -\infty$ ausgezeichnet sind: Sei $a < b$ und $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$, wobei E_1 die direkte Summe der verallgemeinerten Eigenräume zu Eigenwerten mit Realteil kleiner a und E_2 die direkte Summe der verallgemeinerten Eigenräume zu Eigenwerten mit Realteil größer b ist. Dann gilt für Lösungen mit Anfangswert x_0 in E_1 die Abschätzung

$$\|x(t)\| \leq K e^{at} \|x_0\| \quad \forall t \geq 0$$

und für Anfangswerte in E_2

$$\|x(t)\| \leq K e^{bt} \|x_0\| \quad \forall t \leq 0,$$

jeweils mit einer positiven Konstante K .

Wir möchten nun zu zeigen, dass sich die Lösungen einer nichtlinearen Gleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

in einer Umgebung eines Gleichgewichts ganz ähnlich verhalten wie die Lösungen der linearisierten Gleichung, zumindest wenn die Nichtlinearität (in einem geeigneten Sinne) „klein“ ist. Sei dazu der Einfachheit halber $x = 0$ ein Gleichgewicht, also $f(0) = 0$.

Eine Möglichkeit besteht darin, das Vektorfeld durch geeignete Koordinatentransformationen in einer Umgebung des Gleichgewichts so zu verändern, dass der Fluss dort möglichst einfach wird. Diese Möglichkeit verfolgen wir im Moment nicht weiter.

Manchmal ist man gar nicht so sehr daran interessiert, den Fluss durch eine Koordinatentransformation vollständig zu linearisieren, sondern möchte nur bestimmte Lösungen in der Nähe einer Ruhelage beschreiben, zum Beispiel diejenigen, die für $t \rightarrow \infty$ gegen dieses Gleichgewicht konvergieren.

Dazu benutzt man invariante Mengen niedrigerer Dimension, die den verallgemeinerten Eigenräumen bei linearen Gleichungen entsprechen. Da es sich um (immersierte?) Mannigfaltigkeiten handelt, spricht man von *invarianten Mannigfaltigkeiten*.

Die invarianten Unterräume werden bei nichtlinearen Gleichungen also „verbogen“, aber das Verhalten der Lösungen in der Nähe des Gleichgewichts ändert sich nicht grundlegend.

Satz 2.1 (Satz über invariante Mannigfaltigkeiten) *Betrachte eine Differentialgleichung der Form*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + F(x, y) \\ \dot{y} = By + G(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$. Weiter sei A eine $n \times n$ -Matrix und B eine $m \times m$ -Matrix, die Funktionen F und G seien stetig differenzierbar mit $F(0, 0) = G(0, 0) = 0$ und $DF(0, 0) = DG(0, 0) = 0$. Weiter seien $a < b$ gegeben, so dass $\operatorname{Re} \sigma(A) < a$ und $\operatorname{Re} \sigma(B) > b$.

Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für F und G mit Lipschitzkonstante kleiner als δ gilt: Es existiert eine eindeutige invariante Mannigfaltigkeit

$$W(0) := \operatorname{graph}(\Psi) = \{(x, y); y = \Psi(x)\}$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $W(0)$ ist positiv invariant, d.h. $x_0 \in W(0) \Rightarrow (x(t), y(t)) \in W(0)$ für alle $t \geq 0$.

Es existiert sogar eine Konstante $K > 0$, so dass

$$\|x(t)\| + \|y(t)\| \leq Ke^{at} (\|x(0)\| + \|y(0)\|)$$

für $(x(0), y(0)) \in W(0)$.

(ii) Umgekehrt ist jede Lösung, die für alle Zeiten $t \geq 0$ der Abschätzung

$$\|x(t)\| + \|y(t)\| \leq Ke^{at} (\|x(0)\| + \|y(0)\|)$$

genügt, in $W(0)$ enthalten.

Ein wichtiger Spezialfall ist $a < 0 < b$, d.h. wir teilen das Spektrum der Linearisierung genau beim Realteil 0.

Bei *linearen* Differentialgleichungen liegen diejenigen Trajektorien, die für $t \rightarrow \infty$ gegen $x = 0$ konvergieren im verallgemeinerten Eigenraum zu den Eigenwerten mit negativem Realteil.

Für nichtlineare Gleichungen erhält man als Korollar von Satz 2.1 den folgenden Satz, der besagt, dass die verallgemeinerten Eigenräume in der Nähe des Gleichgewichts zu invarianten Mannigfaltigkeiten verbogen werden.

Satz 2.2 (Stabile Mannigfaltigkeit, lokal)

Betrachte die autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $f(0) = 0$. Die Linearisierung $Df(0)$ sei hyperbolisch, habe also keine Eigenwerte auf der imaginären Achse. Sei $\sigma^s := \sigma(Df(0)) \cap \{\operatorname{Re} z < 0\}$ und $\sigma^u := \sigma(Df(0)) \cap \{\operatorname{Re} z > 0\}$ und E^s, E^u seien die stabilen bzw. instabilen Eigenräume von $Df(0)$.

Dann existiert eine Umgebung U von $x = 0$ in E^s und eine Funktion $\Psi^s \in C^1(U, E^u)$, so dass die **lokale stabile Mannigfaltigkeit**

$$W_{loc}^s(0) := \operatorname{graph}(\Psi) = \{(x^s, x^u); x^u = \Psi^s(x^s)\}$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $W_{loc}^s(0)$ ist positiv invariant, d.h. $x_0 \in W_{loc}^s(0) \Rightarrow x(t) \in W_{loc}^s(0)$ für alle $t \geq 0$.

Es existieren sogar Konstanten $K, \eta > 0$, so dass

$$\|x(t)\| \leq Ke^{-\eta t} |x_0|$$

für $x_0 \in W_{loc}^s(0)$.

(ii) Umgekehrt ist jede Lösung, die für alle Zeiten $t \geq 0$ in einer kleinen Umgebung von $x = 0$ bleibt, in $W_{loc}^s(0)$ enthalten.

Wir beweisen zunächst den allgemeineren Satz 2.1 und zeigen dann, wie sich daraus dann Satz 2.2 herleiten lässt.

Der Beweis von Satz 2.1 zerfällt in mehrere Schritte. Zunächst werden wir $W(0)$, bzw. die Abbildung Ψ konstruieren und anschließend nachweisen, dass alle Eigenschaften erfüllt sind. Dabei schreiben wir die Differentialgleichung als Integralgleichung und benutzen schließlich den Banachschen Fixpunktsatz in einem exponentiell gewichteten Raum (siehe Übungsaufgabe).

Wegen der Spektralannahmen an A und B gibt es Konstanten K und $\varepsilon > 0$, so dass die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|e^{At}\| &\leq Ce^{(a-\varepsilon)t} \quad \text{für } t \geq 0, \\ \|e^{Bt}\| &\leq Ce^{(b+\varepsilon)t} \quad \text{für } t \leq 0 \end{aligned}$$

gelten. Als Norm wählt man auf der linken Seite irgendeine Matrix-Normen, beispielsweise $\|A\| = \max |a_{ij}|$. Da alle Matrix-Normen zueinander äquivalent sind, ändert die Wahl einer anderen Matrix-Norm nur die Konstante K .

Um die Abschätzungen einzusehen, stellt man sich A wieder am besten in Jordan–Normalform vor. Dann hat A Blockdiagonalgestalt, wobei jeder Block einem der Eigenwerte entspricht. Diese Blockdiagonalgestalt vererbt sich auf die Matrix e^{At} . Ihre Einträge sind von der Form „ $e^{\lambda t} \cdot \text{Polynom}(t)$ “, mit $\text{Re } \lambda < a - \varepsilon$, woraus sich die erste Abschätzung dann direkt ergibt. Analog argumentiert man für die Matrix B .

Diese Abschätzungen motivieren die folgende Definition:

$$C_a^+([0, \infty), \mathbb{R}^m) := \{x \in C^0([0, \infty), \mathbb{R}^m); \|x\|_{C_a^+} := \sup_{t \geq 0} e^{-at} \|x(t)\| < \infty\}$$

Wir schreiben meist C_a^+ statt $C_a^+([0, \infty), \mathbb{R}^m)$. Der Raum C_a^+ enthält also Funktionen, die höchstens so schnell anwachsen wie e^{at} , falls $a > 0$ bzw. Funktionen, die mindestens so schnell abklingen wie e^{at} , falls $a < 0$.

Angenommen wir haben eine Lösung $(x(\cdot), y(\cdot))$ von (1) auf dem Intervall $[t, T]$ gefunden, dann gilt nach der Variation–der–Konstanten–Formel

$$\left. \begin{aligned} x(T) &= e^{A(T-t)}x(t) + \int_t^T e^{A(T-\tau)}F(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau \\ y(T) &= e^{B(T-t)}y(t) + \int_t^T e^{B(T-\tau)}G(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Für Lösungen, die in C_a^+ für $T \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben, können wir diese Gleichungen noch etwas vereinfachen:

Lemma 2.3 *Falls $(x(t), y(t))$ eine Lösung von (2) ist, die für alle $t \geq 0$ in C_a^+ gleichmäßig beschränkt bleibt, dann erfüllt $x(t) = (x(t), y(t))$ die Integralgleichung*

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}F(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau \\ y(t) &= - \int_t^\infty e^{B(t-\tau)}G(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau. \end{aligned}$$

Beweis des Lemmas: Für festes $t \geq 0$ und beliebiges $T > t$ gilt

$$y(t) = e^{B(t-T)}y(T) + \int_T^t e^{B(t-\tau)}G(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau$$

Wir wollen zeigen, dass man in dieser Gleichung den Grenzübergang $T \rightarrow +\infty$ durchführen darf und daraus die angegebene Darstellung für $y(t)$ erhält.

Betrachte zunächst den ersten Term auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned} \|e^{B(t-T)}y(T)\| &\leq K e^{(b+\varepsilon)(t-T)} \|y(T)\| \\ &\leq K e^{(b-a+\varepsilon)(t-T)} e^{at} e^{-aT} \|y(T)\| \end{aligned}$$

Für $T \rightarrow +\infty$ strebt dieser Term gegen 0, da nach Voraussetzung $e^{-aT} \|y(T)\|$ beschränkt ist.

Beim zweiten Term benutzen wir die Lipschitz-Stetigkeit von G . Danach ist

$$\|G(x(\tau), y(\tau))\| \leq \delta (\|x(\tau)\| + \|y(\tau)\|).$$

Das uneigentliche Integral im zweiten Term ist absolut konvergent und strebt daher gegen

$$\int_{-\infty}^t e^{B(t-\tau)} G(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau, \text{ da}$$

$$\begin{aligned} \int_T^t \|e^{B(t-\tau)}G(x(\tau), y(\tau))\| \, d\tau &\leq \int_T^t K e^{(b+\varepsilon)(t-\tau)} \cdot \delta (\|x(\tau)\| + \|y(\tau)\|) \, d\tau \\ &\leq \delta K e^{at} \int_T^t e^{b-a+\varepsilon}(t-\tau) \underbrace{e^{-a\tau} (\|x(\tau)\| + \|y(\tau)\|)}_{\leq \|(x,y)\|_{C_a^+}} \, d\tau \\ &\leq \frac{K\delta e^{at}}{b-a+\varepsilon} \|(x, y)\|_{C_a^+}. \end{aligned}$$

Wegen $b-a+\varepsilon > 0$ konvergiert das Integral für $T \rightarrow \infty$. □

Bemerkung: Man beachte, dass in der Darstellung von $(x(t), y(t))$ nur der Anfangswert $x(0)$ auftaucht, nicht aber $y(0)$. Dies ist schon ein Hinweis darauf, dass dieser Anfangswert $y(0)$ bereits durch die Wachstumsbedingung eindeutig festgelegt ist.

Beweis von Satz 2.1 :

Wir definieren für (x, y) in C_a^+ eine Abbildung

$$\mathcal{T}(x, y) = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_1(x, y) \\ \mathcal{T}_2(x, y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}F(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau \\ - \int_t^\infty e^{B(t-\tau)}G(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau \end{pmatrix}$$

durch die rechte Seite der Integralgleichung aus dem obigen Lemma mit festem x_0 . Fixpunkte von $\mathcal{T}$ sind dann Lösungen der Integralgleichung.

Zeige:

$$\mathcal{T} : C_a^+(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{n+m}) \longrightarrow C_a^+(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{n+m})$$

ist eine Kontraktion.

Behauptung: $\mathcal{T}$ bildet tatsächlich $C_a^+(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{n+m})$ in sich ab:

Wir untersuchen dabei die beiden Komponenten getrennt. Zunächst ist

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_1(x, y)\|_{C_a^+} &= \sup_{t \geq 0} e^{-at} \left\| e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} F(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau \right\| \\ &\leq \sup_{t \geq 0} e^{-at} \cdot K e^{(a-\varepsilon)t} \|x_0\| + \sup_{t \geq 0} e^{-at} \int_0^t K e^{(a-\varepsilon)(t-\tau)} \|F(x(\tau), y(\tau))\| \, d\tau \\ &\leq K \|x_0\| + \sup_{t \geq 0} e^{-\varepsilon(t-\tau)} \delta \|(x, y)\|_{C_a^+} < \infty. \end{aligned}$$

Ganz analog erhält man

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_2(x, y)\|_{C_a^+} &= \sup_{t \geq 0} e^{-at} \left\| - \int_t^\infty e^{B(t-\tau)} G(x(\tau), y(\tau)) \, d\tau \right\| \\ &\leq \sup_{t \geq 0} e^{-at} \int_t^\infty K e^{(b+\varepsilon)(t-\tau)} \|G(x(\tau), y(\tau))\| \, ds \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \int_t^\infty K e^{(b-a+\varepsilon)(t-\tau)} e^{-a\tau} \delta (\|x(\tau)\| + \|y(\tau)\|) \, ds \\ &\leq \frac{K\delta}{b-a+\varepsilon} \|(x, y)\|_{C_a^+} < \infty. \end{aligned}$$

Behauptung: $\mathcal{T}$ ist eine Kontraktion mit Kontraktionsrate $1/2$ unabhängig von x_0 :

Seien dazu $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C_a^+$. Wir betrachten wieder getrennt die beiden Komponenten von $\mathcal{T}$. Für die erste Komponente gilt:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_1(x_1, y_1) - \mathcal{T}_1(x_2, y_2)\|_{C_a^+} &= \sup_{t \geq 0} e^{-at} \left| \int_0^t e^{A(t-\tau)} F(x_1(\tau), y_1(\tau)) - F(x_2(\tau), y_2(\tau)) \, d\tau \right| \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \int_0^t K e^{-\varepsilon(t-\tau)} e^{-a\tau} \delta (\|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| + \|y_1(\tau) - y_2(\tau)\|) \, d\tau \\ &\leq \frac{K\delta}{\varepsilon} \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_{C_a^+}. \end{aligned}$$

Analog gilt für die zweite Komponente

$$\|\mathcal{T}_2(x_1, y_1) - \mathcal{T}_2(x_2, y_2)\|_{C_a^+} = \sup_{t \geq 0} e^{-at} \left\| \int_t^\infty e^{B(t-\tau)} G(x_1(\tau), y_1(\tau)) - G(x_2(\tau), y_2(\tau)) \, d\tau \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{t \geq 0} \int_t^\infty K e^{(b+\varepsilon)(t-\tau)} \delta (\|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| + \|y_1(\tau) - y_2(\tau)\|) \, d\tau \\
&\leq \frac{K\delta}{\varepsilon} \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_{C_a^+} \\
&\leq \frac{1}{4} \|x_1 - x_2\|_{BC^0}.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist dann

$$\|\mathcal{T}(x_1, y_1) - \mathcal{T}(x_2, y_2)\|_{C_a^+} \leq \frac{K\delta}{\varepsilon} \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_{C_a^+} \leq \frac{1}{2} \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_{C_a^+}$$

falls $\delta > 0$ hinreichend klein ist. Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt nun direkt, dass $\mathcal{T}$ für jedes feste x_0 einen Fixpunkt in C_a^+ besitzt. Diesen Fixpunkt nennen wir $(x_*(t; x_0), y_*(t; x_0))$. Aus der Konstruktion folgt sofort, dass $x_*(0; x_0) = x_0$. Nun können wir Ψ definieren als

$$\Psi(x_0) := y_*(0; x_0).$$

Ψ ist zumindest stetig, da der Fixpunkt beim Banachschen Fixpunktsatz stetig von Parametern (hier x_0) abhängt wie die Kontraktion $\mathcal{T}$ selbst. Beweise dazu finden sich beispielsweise in den Büchern von [Deimling] oder [Chow & Hale].

$\text{Graph}(\Psi)$ ist positiv invariant, da der Fixpunkt eindeutig ist. Betrachte dazu einen Punkt $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) := (\bar{x}_0, \Psi(\bar{x}_0)) \in \text{Graph}(\Psi)$ und eine Zeit $\bar{t} > 0$. Für die zugehörige Lösung $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ gilt

$$\sup_{t \geq 0} e^{-at} (\|\bar{x}(t)\| + \|\bar{y}(t)\|) < \infty,$$

der Vorwärtsorbit von $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ ist also in C_a^+ beschränkt. $\Psi(\bar{x}(\bar{t}))$ ist aber der *eindeutige* y -Wert, so dass der Vorwärtsorbit durch $(\bar{x}(\bar{t}), \Psi(\bar{x}(\bar{t})))$ in C_a^+ beschränkt bleibt. Also ist $\bar{y}(\bar{t}) = \Psi(\bar{x}(\bar{t}))$.

Die Abschätzung für Lösungen in $W(0)$ ergibt sich direkt daraus, dass diese Lösungen in C_a^+ liegen.

Umgekehrt sind Lösungen $(x(t), y(t))$ mit

$$\sup_{t \geq 0} e^{-at} (\|x(t)\| + \|y(t)\|)$$

in C_a^+ enthalten, wegen der Eindeutigkeit des Fixpunktes von $\mathcal{T}$ muss daher $y(t) = \Psi(x(t))$ sein für alle $t \geq 0$, d.h. die Trajektorie liegt in $W(0)$. $\square$

Bemerkung: Wenn man zeigen will, dass die Abbildung Ψ und damit die Mannigfaltigkeit $W(0)$ stetig differenzierbar oder sogar k -mal stetig differenzierbar ist, braucht man weitere Informationen über die Spektrallücke $[a, b]$.

Es gilt dabei:

1. Ist $a < 0 < b$, dann ist die invariante Mannigfaltigkeit so glatt wie die Nichtlinearitäten F und G .
2. Ist $0 < a < b$, dann gilt:

$$\frac{b}{a} > k \Rightarrow \Psi \in C^k.$$

Lemma: Sei A, B, F, G wie oben und die invariante Mannigfaltigkeit $W(0)$ sei Graph einer C^1 -Funktion Ψ . Die invariante Mannigfaltigkeit $W(0)$ ist dann tangential an den zugehörigen Eigenraum $\{(x, y); y = 0\}$ in $x = y = 0$.

Beweis: Wegen der Invarianz von $W(0)$ muss gelten, dass

$$\begin{aligned} \dot{y} &= D\Psi(x)\dot{x} \\ \Leftrightarrow B\Psi(x) + G(x, \Psi(x)) &= D\Psi(x)(Ax + F(x, \Psi(x))) \end{aligned}$$

Differenziert man diesen Ausdruck und wertet ihn dann bei $x = 0$ aus erhält man die Identität

$$B D\Psi(0) = D\Psi(0) A.$$

Wir zeigen nun, dass wegen der unterschiedlichen Spektren von A und B daraus folgt, dass $D\Psi(0) = 0$ ist. Zeige zuerst, dass Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ im Kern von $D\Psi(0)$ liegen. Dazu berechnet man

$$D\Psi(0)\lambda v = D\Psi(0)Av = B D\Psi(0)v,$$

d.h. falls $D\Psi(0)v \neq 0$ wäre, dann wäre es ein Eigenvektor von B zum Eigenwert λ . Dies widerspricht aber den Annahmen an das Spektrum von B , es muss also $D\Psi(0)v = 0$ sein. Ähnlich kann man für Hauptvektoren argumentieren. Falls $Av = \lambda v + v_1$, wobei $v_1 \in \mathcal{N}(D\Psi(0))$, dann ist wie oben

$$D\Psi(0)Av = \lambda D\Psi(0)v = B D\Psi(0)v$$

und es liegt auch v im Kern von $D\Psi(0)$. So kann man sukzessive zeigen, dass alle Eigenvektoren und Hauptvektoren von A in $\mathcal{N}(D\Psi(0))$ liegen. Damit muss $D\Psi(0) = 0$ sein. $\square$

Beweis von Satz 2.2: Wir möchten gerne den vorigen Satz anzuwenden und schreiben daher nach einer linearen Koordinatentransformation unsere Differentialgleichung in der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}^s &= Ax + F(x^s, x^u) \\ \dot{x}^u &= Bx^u + G(x^s, x^u), \end{aligned}$$

wobei x^s Koordinaten in E^s und x^u Koordinaten in E^u sind. Weiter ist $A = Df(0)|_{E^s}$ und $B = Df(0)|_{E^u}$, für die Spektren gilt daher $\sigma(A) = \sigma^s$ und $\sigma(B) = \sigma^u$.

Wir können nun $a < 0$ so wählen, dass

$$\lambda \in \sigma^s \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda < a$$

und $b = 0$ in Satz 2.1. Das einzige Problem ist noch, dass die Lipschitz-Konstanten von F und G im allgemeinen nicht klein sind. Dieses Problem löst man durch „Abschneiden“, d.h. man modifiziert die Nichtlinearitäten außerhalb einer Umgebung von $x = 0$. Dazu ersetzen wir F und G durch $G(x) \cdot \chi(|x|)$ mit einer Abschneidefunktion $\chi \in C^k$, für die gilt:

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \begin{cases} 1 & \text{für } \|x\| \leq r, \\ 0 & \text{für } \|x\| \geq 2r \end{cases} \\ \text{sowie} \quad |\nabla \chi| &\leq 2/r. \end{aligned}$$

Wenn wir nun r klein genug wählen, können wir erreichen, dass die Lipschitz-Konstanten von F und G beide kleiner als δ sind, denn die Lipschitz-Konstante von $F \cdot \chi$ lässt sich abschätzen durch das Supremum von $|\nabla(F \cdot \chi)|$. Für dieses gilt wiederum

$$\sup_x |\nabla(F \cdot \chi)| \leq \sup_{\|x\| \leq 2r} |\nabla F(x)| + \sup_{\|x\| \leq 2r} |F(x)| \frac{2}{r}$$

Da $F(x) = \mathcal{O}(\|x\|^2)$ und $|\nabla F(x)| = \mathcal{O}(\|x\|)$ wird für hinreichend kleines r dieses Supremum beliebig klein.

Nun können wir Satz 2.1 anwenden und erhalten eine invariante Mannigfaltigkeit $W^s(0)$, die alle Lösungen $x(t)$ enthält, für die

$$\sup_{t \geq 0} e^{at} (\|x^s(t)\| + \|x^u(t)\|) < \infty$$

Insbesondere konvergieren also Lösungen in $W^s(0)$ exponentiell schnell gegen 0.

Um zu zeigen, dass Lösungen, die für alle positiven Zeiten in einer Umgebung von $x = 0$ bleiben, automatisch in der stabilen Mannigfaltigkeit liegen, wenden wir Satz 2.1 gleich noch einmal an, diesmal allerdings mit $a = 0$ und $b > 0$ so gewählt, dass $\lambda \in \sigma^u \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda > b$.

Man erhält dann eine weitere invariante Mannigfaltigkeit $\tilde{W}^s(0)$, die alle vorwärts beschränkten Lösungen enthält. Die Dimensionen von $W^s(0)$ und $\tilde{W}^s(0)$ stimmen überein, beide sind gleich der Anzahl der Eigenwerte von A mit negativem Realteil. Außerdem enthält natürlich $\tilde{W}^s(0)$ alle Lösungen, die nicht nur beschränkt sind, sondern exponentiell schnell gegen 0 konvergieren. Also ist $W^s(0) \subseteq \tilde{W}^s(0)$ und die beiden Mannigfaltigkeiten müssen übereinstimmen. □

Analog zeigt man die Existenz einer **lokalen instabilen Mannigfaltigkeit** $W_{loc}^u(0)$, die alle Lösungen enthält, die für $t \leq 0$ gegen $x = 0$ konvergieren. Dazu kehrt man die Zeit um, d.h. man betrachtet statt einer Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ die Funktion $z(t) := x(-t)$. Diese erfüllt die Differentialgleichung

$$\dot{z}(t) = -\dot{x}(-t) = -f(x(-t)) = -f(z(t)).$$

Daher ist $z = 0$ eine Ruhelage, und die Linearisierung dort ist gerade $-Df(0)$, das Spektrum wird also am Ursprung gespiegelt. Dadurch vertauschen sich die Rollen von σ^s und σ^u . Die lokale stabile Mannigfaltigkeit für die z -Gleichung ist dann eine lokale instabile Mannigfaltigkeit $W_{loc}^u(0)$ für die ursprüngliche Gleichung. Sie enthält alle Lösungen, die für alle $t \leq 0$ in einer Umgebung von $x = 0$ bleiben. Diese Lösungen konvergieren für $t \rightarrow -\infty$ exponentiall schnell gegen 0.

Bemerkungen:

1. Man kann die Mannigfaltigkeiten $W_{loc}^s(0)$ und $W_{loc}^u(0)$ zu globalen **invarianten Mannigfaltigkeiten** fortsetzen durch den Fluss:

$$\begin{aligned} W^s(0) &= \bigcup_{t \leq 0} \Phi_t(W_{loc}^s(0)) \\ W^u(0) &= \bigcup_{t \geq 0} \Phi_t(W_{loc}^u(0)). \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} W^s(0) &= \{x_0 \in \mathbb{R}^n; \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x_0) = 0\}, \\ W^u(0) &= \{x_0 \in \mathbb{R}^n; \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(x_0) = 0\}. \end{aligned}$$

2. Wie oben schon erwähnt ist $W^s(0)$ so glatt wie die Nichtlinearität f . Für $f \in C^1$ ist auch $W^s(0)$ differenzierbar und tangential an den Eigenraum E^s .
3. Homokline Orbits, d.h. Trajektorien mit $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$ liegen im Schnitt $W^s(0) \cap W^u(0)$. Generell trennen die invarianten Mannigfaltigkeiten oft Bereiche mit qualitativ unterschiedlichem Verhalten.

Beispiel: Wir betrachten eine Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^2$, deren Phasenportrait wie folgt aussieht:

Das Gleichgewicht vom Sattel-Typ besitzt je einen positiven und negativen reellen Eigenwert, also sind sowohl die stabile als auch die instabile Mannigfaltigkeit dieses Gleichgewichts eindimensional.

Vergleicht man nun Lösungen unter- und oberhalb des rechten Astes der stabilen Mannigfaltigkeit, so sieht man, dass die stabile Mannigfaltigkeit Lösungen die gegen die spiralförmige Senke konvergieren von solchen Lösungen trennt, die nicht gegen ein Gleichgewicht konvergieren.

Wenn wir uns nun noch vorstellen, dass die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x, \mu)$ noch von einem Parameter abhängt, dann kann es passieren, dass sich die stabile und die instabile Mannigfaltigkeit kreuzen, wenn der Parameter μ sich ändert. Die Phasenportraits für verschiedene Werte von μ sehen dann so aus:

Interessant ist, dass ein konsistentes Phasenportrait im rechten Bild nur möglich ist, wenn ein periodischer Orbit existiert ($\leadsto$ Satz von Poincaré-Bendixson), vorausgesetzt es existieren nicht noch weitere Ruhelagen. Obwohl sich die Phasenportraits in der Nähe der Gleichgewichte nicht ändern, verursacht die Veränderung der relativen Lage von stabiler und instabiler Mannigfaltigkeit eine Änderung der Dynamik. Man bezeichnet dies als „globale Verzweigung“, da man die Änderung nicht allein in der Umgebung eines einzelnen Punktes beobachten kann.

2.1 Zentrumsmannigfaltigkeiten für Differentialgleichungen

Analog zur stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten von *hyperbolischen* Ruhelagen, kann man auch (lokal) invariante Mannigfaltigkeiten finden, wenn eine Ruhelage nicht hyperbolisch ist.

Hier zerfällt das Spektrum der Linearisierung in *drei* Teile: den stabilen Anteil, den instabilen Anteil und den Zentrums-Anteil, der zu Eigenwerten mit verschwindendem Realteil gehört.

Die zu diesem Teil des Spektrums gehörende invariante Mannigfaltigkeit, die *Zentrumsmannigfaltigkeit*, wird in den kommenden Kapiteln eine herausragende Rolle spielen. Sie enthält in vielen Fällen die „wesentliche“ Dynamik.

Schon im linearen Fall entsprechen beschränkte oder nur polynomial anwachsende Lösungen Eigenwerten mit verschwindendem Realteil, daher ist es insbesondere unser Ziel, eine invariante Menge zu konstruieren, die alle *beschränkten* Lösungen in der Nähe der Ruhelage enthält, also beispielsweise alle weiteren Ruhelagen und periodischen Orbits.

Satz 2.4 (Zentrumsmannigfaltigkeit, global) *Betrachte nichtlineare Differentialgleichungen der Form*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $f(0) = 0$.

Zerlege das Spektrum $\sigma(Df(0))$ in die drei Teile

$$\sigma^s := \sigma(Df(0)) \cap \{\operatorname{Re} z < -\varepsilon\}, \quad \sigma^c := \sigma(Df(0)) \cap \{|\operatorname{Re} z| \leq \varepsilon\} \quad \text{und} \quad \sigma^u := \sigma(Df(0)) \cap \{\operatorname{Re} z > \varepsilon\}.$$

Seien E^s , E^c und E^u die entsprechenden (verallgemeinerten) Eigenräume von $Df(0)$.

Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle Nichtlinearitäten $f(x) - Df(0)x$ mit Lipschitz-Konstante kleiner als δ gilt:

Die Menge

$$W^c(0) := \{x_0 \in \mathbb{R}^n; \sup_{t \in \mathbb{R}} e^{\varepsilon|t|} \|x(t)\| < \infty\}$$

ist (positiv und negativ) invariant.

$W^c(0)$ ist ein Graph über dem Zentrums-Eigenraum E^c :

$$W^c(0) = \operatorname{graph}(\Psi) = \{(x^c, x^h) \in E^c \times E^h; x^h = \Psi(x^c)\}$$

mit einer Lipschitz-stetigen Funktion $\Psi : E^c \rightarrow E^h$.

Damit ist $W^c(0)$ eine Mannigfaltigkeit und hat dieselbe Dimension wie E^c . $W^c(0)$ heißt **globale Zentrumsmannigfaltigkeit**.

Der Beweis von Satz 2.4 benutzt wieder unseren Satz 2.1, und zwar gleich zweimal. Zunächst konstruieren wir eine positiv invariante *zentrumstabile Mannigfaltigkeit*, indem wir Satz 2.1 anwenden mit $a = \varepsilon$ und $b > a$, so dass

$$\lambda \in \sigma^u \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda > b.$$

Diese ist ein Graph über $E^c \oplus E^s$. Innerhalb der zentrumstabilen Mannigfaltigkeit (bzw. für die reduzierte Gleichung in $E^c \oplus E^s$) wenden wir Satz 2.1 noch einmal an, diesmal nach einer Zeitumkehr. Dies liefert uns eine negativ invariante Mannigfaltigkeit bestehend aus Lösungen, die für $t \rightarrow -\infty$ höchstens wie $e^{-\varepsilon t}$ anwachsen. Diese Mannigfaltigkeit ist die gesuchte Zentrumsmannigfaltigkeit.

Man zeigt dann noch, dass sie positiv *und* negativ invariant ist, die Eindeutigkeit folgt direkt aus der Eindeutigkeit der Mannigfaltigkeit in Satz 2.1.

Die C^k -Differenzierbarkeit von $f(x)$ vererbt sich auf die Zentrumsmannigfaltigkeit:

Satz 2.5 (Glattheit der Zentrumsmannigfaltigkeit, ohne Beweis) *Sei $A = Df(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ wie oben und $g(x) = f(x) - Ax$. Dann existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $\gamma_k > 0$, so dass $\Psi \in C^k(E^c, E^h)$, falls $g \in BC^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\sup |Dg| < \gamma_k$.*

Ein Beweis dieses Satzes findet sich in dem erwähnten Artikel von Vanderbauwhede.

Bemerkung:

- Im allgemeinen ist g natürlich nicht gleichmäßig beschränkt. Dann kann man immer noch g „abschneiden“ und eine **lokale Zentrumsmannigfaltigkeit** konstruieren. Dies erlaubt immer noch Aussagen über Lösungen, die in dem Bereich des Phasenraums bleiben, in dem g nicht modifiziert wurde.
- Allerdings ist die so konstruierte lokale Zentrumsmannigfaltigkeit nicht mehr eindeutig, sondern hängt von der Abschneidefunktion ab. Eindeutig ist nur die Taylor-Entwicklung von Ψ in $x = 0$.
- Um die Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit zu untersuchen, projiziert man das Vektorfeld auf W^c mit Hilfe der Projektion P_c in den Zentrums-Eigenraum E^c . Dort löst man dann die *reduzierte Gleichung*

$$\dot{x}c = P_c f(xc + \Psi(xc)).$$

Die Lösungen in der Zentrumsmannigfaltigkeit erhält man dann wieder als $x = xc + \Psi(xc)$.

- Eine Zentrumsmannigfaltigkeit kann man genauso für Systeme

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

mit Parametern konstruieren. In diesem Fall fügt man in der Regel noch triviale Gleichungen

$$\dot{\mu} = 0$$

für die Parameter μ hinzu und erhält somit einen höherdimensionalen Zentrums-Eigenraum.

- Wie oben erwähnt, kann man zeigen, dass für $g \in C^k$ auch die Zentrumsmannigfaltigkeit C^k ist, also $\Psi \in C^k$. Allerdings gilt diese Aussage nur für $k < \infty$! Es gibt C^∞ -Vektorfelder mit Gleichgewichten, die keine C^∞ -Zentrumsmannigfaltigkeit besitzen ($\leadsto$ Vanderbauwhede). Technisch sieht man das daran, dass dann $\gamma_k \rightarrow 0$ strebt für $k \rightarrow \infty$.

Wenn man eine lokale Zentrumsmannigfaltigkeit konstruieren will, muss man daher in einer immer kleineren Umgebung abschneiden.

2.2 Beispiel:

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 y - x^5 \\ \dot{y} &= -y + x^2\end{aligned}$$

in der Nähe der Ruhelage $x = y = 0$. Die Linearisierung ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und besitzt die Eigenwerte 0 und -1 . Nach Satz 2.4 existiert lokal eine Zentrumsmanigfaltigkeit, die tangential an den Eigenraum $\{y = 0\}$ zum Eigenwert $\lambda = 0$ ist. Selbst wenn wir das nicht wissen, können wir einfach eine invariante Mannigfaltigkeit als Graph $y = h(x)$ einer Funktion

$$h(x) = ax + bx^2 + cx^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

suchen. Dazu berechnen wir $\dot{y}$ auf zwei Arten: zunächst ist wegen $y = h(x)$

$$\begin{aligned}\dot{y} &= h'(x)\dot{x} \\ &= (a + 2bx + 3cx^2 + \mathcal{O}(x^3))(x^2h(x) - x^5) \\ &= (a + 2bx + 3cx^2 + \mathcal{O}(x^3))(ax^3 + bx^4 + (c-1)x^5) \\ &= a^2x^3 + 3abx^4 + \mathcal{O}(x^5)\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -h(x) + x^2 \\ &= -ax + (1-b)x^2 - cx^3 + \mathcal{O}(x^4)\end{aligned}$$

Vergleicht man die beiden Ausdrücke, kommt man auf die Bedingungen $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$. Die Zentrumsmanigfaltigkeit hat also die Form

$$y = x^2 + \mathcal{O}(x^4)$$

und die Dynamik auf W^c ist gegeben durch Einsetzen dieser Approximation in die Differentialgleichung für x :

$$\dot{x} = x^4 - x^5 + \mathcal{O}(x^6).$$

Insbesondere sieht man, dass die Ruhelage $x = y = 0$ instabil ist.

Hätte man die ursprüngliche Differentialgleichung einfach auf den Zentrumseigenraum $\{y = 0\}$ eingeschränkt, wäre man zu einem anderen (falschen !) Ergebnis gelangt.

Bemerkung: Auf diese Weise kann man ganz allgemein die Taylor-Entwicklung von Ψ aus der Taylor-Entwicklung von g sukzessive berechnen, siehe z.B. [Iooss & Adelmeyer: *Topics in Bifurcation Theory and Applications*, S. 8–10]

2.3 Invariante Mannigfaltigkeiten für Diffeomorphismen

Stabile, instabile und Zentrums-Mannigfaltigkeiten findet man auch für diskrete dynamische Systeme

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

Wir formulieren hier nur den Satz über die stabile Mannigfaltigkeit, die anderen Sätze gelten aber entsprechend.

Satz 2.6 (Lokale stabile Mannigfaltigkeit, diskret)

Sei $F : \mathbb{R}^m = X \rightarrow X$ ein C^1 -Diffeomorphismus und $x = 0$ ein hyperbolischer Fixpunkt von F , d.h. $F(0) = 0$ und die Jacobi-Matrix $DF(0)$ habe keine Eigenwerte mit Betrag 1. Sei E^s der verallgemeinerte Eigenraum zu den Eigenwerten mit Betrag < 1 und E^u

der verallgemeinerte Eigenraum zu den Eigenwerten mit Betrag > 1 . Dann existiert eine positiv invariante lokale stabile Mannigfaltigkeit $W_{loc}^s(0)$, genauer:

Es existiert eine Umgebung U von $x = 0$ in E^s und eine Funktion $\Psi \in C^1(U, E^u)$, so dass

$$W_{loc}^s(0) := \text{graph}(\Psi) = \{(x^s, x^u); x^u = \Psi(x^s)\}$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $W_{loc}^s(0)$ ist positiv invariant und es existieren Konstanten $K > 0$, $0 < \eta < 1$, so dass

$$|F^n(x_0)| \leq K\eta^n |x_0|$$

für $x_0 \in W_{loc}^s(0)$. (ii) Umgekehrt enthält $W_{loc}^s(0)$ alle Lösungen, die für alle positiven Zeiten $t \geq 0$ in einer kleinen Umgebung von $x = 0$ bleiben.

Auch diese lokale stabile Mannigfaltigkeit kann man natürlich zur globalen stabilen Mannigfaltigkeit

$$\begin{aligned} W^s(0) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{-n}(W_{loc}^s(0)) \\ &= \{x_0 \in X; \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x_0) = 0\} \end{aligned}$$

fortsetzen. Analog existiert auch eine *instabile Mannigfaltigkeit*, die alle Punkte enthält, deren Rückwärtsorbit gegen $x = 0$ konvergiert.