

Vorlesung “Einführung in die Dynamischen Systeme” (Wintersemester 2001/2002)

Jörg Härterich
Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik I
Arnimallee 2-6, 14195 Berlin
haerter@math.fu-berlin.de

11. Mai 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
1.1	Sieben Beispiele	3
1.1.1	Wachstum	3
1.1.2	Fibonacci Kaninchen	4
1.1.3	Volkswirtschaft	4
1.1.4	Newtonsche Gesetze und Planetenbewegung	4
1.1.5	Pendelgleichung	5
1.1.6	Ausbreitung einer Epidemie	5
1.1.7	Räuber-Beute-Systeme	6
1.2	Explizite Lösungen	6
1.2.1	Trennung der Variablen	7
1.2.2	Homogene Differentialgleichungen	9
1.2.3	Potenzreihenansatz	9
1.2.4	Lineare Differentialgleichungen	10
2	Grundbegriffe der Dynamik	10
2.1	Vektorfelder und Flüsse	10
2.1.1	Vom Fluss zur Differentialgleichung	12
2.1.2	Koordinatentransformationen	13
2.2	Nichtautonome Differentialgleichungen und Evolutionen	14
2.3	Diskrete Dynamische Systeme	15
2.4	Erhaltungsgrößen und Hamilton-Systeme	16
2.4.1	Hamilton-Systeme	17
2.5	Nichtlineare Pendel [Arnold, S.140–152]	19
2.6	Euler-Multiplikatoren	22
3	Existenz- und Eindeutigkeitsätze	24
3.1	Existenz	24
3.1.1	Der Banachsche Fixpunktsatz	24
3.1.2	Der Satz von Picard-Lindelöf	25
3.2	Fortsetzung von Lösungen	29
3.2.1	Maximales Existenzintervall	29
3.3	Stetige Abhängigkeit	32
3.3.1	Stetige Abhängigkeit von Parametern	33
3.4	Differenzierbare Abhängigkeit	33
3.5	Fluss und Differentialgleichung	37

3.6	Diskrete dynamische Systeme	38
4	Numerik von Differentialgleichungen	38
4.1	Eulersches Polygonzugverfahren	39
4.2	Einschrittverfahren	42
4.3	Schrittweitensteuerung	45
4.4	Prädiktor-Korrektor-Verfahren	47
5	Lineare Gleichungen	48
5.1	Die Jordan-Normalform: Das Wichtigste in Kürze	48
5.2	Die Matrix-Exponentialfunktion	49
5.3	Autonome lineare Differentialgleichungen	51
5.3.1	Langzeitverhalten	53
5.3.2	Gleichungen höherer Ordnung	55
5.4	Lineare Differenzgleichungen	55
5.5	Klassifikation ebener linearer Differentialgleichungen	56
5.6	Variation-der-Konstanten	57
5.7	Nichtautonome lineare Differentialgleichungen	58
5.8	Der Satz von Liouville	60
6	Stabilität	62
6.1	Stabilität von Fixpunkten in diskreten Systemen	64
6.2	Stabilität von periodischen Lösungen, Floquet-Theorie	65
6.3	Kleiner Ausblick: Lyapunov-Exponenten	68
6.4	ω -Limesmengen	69
6.5	Lyapunov-Funktionen	70
6.6	Mittelung (Averaging)	73
7	Lokale Struktur von Vektorfeldern	76
7.1	Der Satz von der Begradigung	76
7.2	Der Satz von Grobman-Hartman	77
7.3	Stabile und instabile Mannigfaltigkeit	81
8	Ebene Vektorfelder	85
8.1	Der Satz von Poincaré-Bendixson	86
8.1.1	Beispiel: Brüsselator	87
8.1.2	Beispiel: Kaldors Konjunkturzyklus	89
A	Hilfsmittel aus Analysis I/II und Linearer Algebra I/II	91
A.1	Der Banachsche Fixpunktsatz, C^k -Version	91
A.2	Der Satz über implizite Funktionen	91
A.3	Matrixnormen	91
A.4	Abschneidefunktionen	91
B	Der Beweis des Satzes von Grobman-Hartman	91
C	(Nicht ganz unvoreingenommene) Kommentare zur Literatur	94

1 Einführung

Das vorliegende Skript entstand parallel zu einer im Wintersemester 2001/02 gehaltenen Vorlesung an der Freien Universität Berlin. Herzlicher Dank geht an Julia Eehrt für das Aufspüren einiger Fehler.

Sehr viele quantitative Naturgesetze und Modelle aus Physik, Chemie, Biologie, Volkswirtschaftslehre, etc. werden durch **Gewöhnliche Differentialgleichungen** beschrieben. Einige Beispiele werden wir gleich kennenlernen.

Eine *Differentialgleichung* ist zunächst einmal eine Gleichung, die eine Funktion $x(t) : \mathbb{R} \supseteq (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ und ihre Ableitung $\dot{x}(t)$ oder mehrere Ableitungen miteinander in Beziehung setzt:

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}) = 0.$$

Fast immer werden wir es aber mit Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = f(t, x)$$

oder

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$$

zu tun haben. Nach der höchsten vorkommenden Ableitung nennt man

$$\dot{x}(t) = \sin x(t) + tx(t)^2$$

eine *Differentialgleichung 1. Ordnung* und entsprechend

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0$$

eine *Differentialgleichung 2. Ordnung*.

Der Unterschied ist nicht dramatisch: Betrachtet man $\dot{x} =: v$ als neue unabhängige Variable, so geht zum Beispiel die letzte Gleichung in ein System von Gleichungen 1. Ordnung

$$\begin{cases} \dot{u}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -u(t) \end{cases}$$

über. Allerdings ist dann das System wegen $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ doppelt so groß.

Eine Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = A(t)x + b(t), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

bei der die rechte Seite eine lineare Funktion von x ist, heisst *lineare Differentialgleichung*. Viele interessante Differentialgleichungen sind aber *nichtlinear*.

In den meisten Fällen interessiert man sich für das *Anfangswertproblem*: Ausser der Differentialgleichung ist noch ein Startwert x_0 zu einer bestimmten Zeit t_0 vorgegeben. Jetzt aber konkret:

1.1 Sieben Beispiele

1.1.1 Wachstum

Wir bezeichnen mit $p(t)$ die Bevölkerung einer Spezies zur Zeit t , z.B. der Pantoffeltierchen im Reagenzglas, der Menschen auf der Erde, etc. Im einfachsten Modell ist die Änderung $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$ proportional zu $p(t)$, z.B. wenn man annimmt, dass sowohl die Geburtenrate g als auch die Sterberate s proportional zur Bevölkerungszahl ist.

Die entsprechende Differentialgleichung

$$\dot{p}(t) = gp(t) - sp(t) = (g - s)p(t)$$

hat die Lösung

$$p(t) = p(t=0)e^{(g-s)t}.$$

Die Lösung kann sich nun recht unterschiedlich verhalten:

1. $g > s$: Dann strebt $p(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ ("Bevölkerungsexplosion")
2. $g = s$: Dann bleibt $p(t) \equiv p(0)$ konstant
3. $g < s$: Dann strebt $p(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ ("Bevölkerung stirbt aus").

Bemerkung: Natürlich ist die Annahme $p(t) \in C^1$ eine mathematische Idealisierung.

1. ist $p(t)$ eine natürliche Zahl und
2. ändert sich $p(t)$ zu diskreten Zeiten, ist also nicht einmal stetig.

Trotzdem ist die Annahme $p(t) \in C^1$ für große Bevölkerungszahlen eine brauchbare Approximation.

1.1.2 Fibonacci Kaninchen

Leonardo von Pisa hat schon 1202 ein Populationsmodell mit *diskreter Zeit* $n = 0, 1, 2, \dots$ untersucht. Ein neugeborenes Hasenpaar wird in einen umzäunten Garten gesetzt. Jedes Hasenpaar erzeugt während seines Lebens jeden Monat ein weiteres Paar. Ein neugeborenes Paar wird nach einem Monat fruchtbar und bekommt somit nach zwei Monaten seine ersten Nachkommen. Es soll angenommen werden, dass die Hasen nie sterben.

Bezeichnen wir mit k_n die Anzahl Kaninchenpaare nach n Monaten, dann ist $k_0 = k_1 = 1$ (das erste Paar) und $k_2 = 2$, da das erste Paar seine ersten Nachkommen nach zwei Monaten bekommt. Auch im dritten Monat bekommt nur das erste Paar neue Nachkommen, es ist also $k_3 = 3$. Im vierten Monat leben noch alle Kaninchen aus dem dritten Monat und die Paare, die nach zwei Monaten schon da waren, bekommen Nachwuchs. Es ist also $k_4 = k_3 + k_2$.

Allgemein erhält man die *Rekursionsformel*

$$k_{n+1} = k_n + k_{n-1}$$

Dabei steht der 1. Term k_n für die Anzahl der Kaninchen, die schon da sind, während der 2. Term k_{n-1} die Anzahl der im $(n+1)$ -ten Monat neu geborenen Kaninchenpaare angibt.

Nur mal angenommen, wir hätten auch hier ein exponentielles Wachstum wie im vorigen Beispiel, d.h. $k_n = k_0 \alpha^n$, wie groß wäre dann α ?

Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Rekursionsformel erhalten wir die Gleichung

$$\alpha^2 = \alpha + 1$$

für α mit der positiven Lösung $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (*„Goldener Schnitt“*). Wir haben bisher nicht gezeigt, dass der Ansatz gerechtfertigt ist, auf diese Frage kommen wir aber später noch ausführlich zurück.

1.1.3 Volkswirtschaft

Ein *sehr* vereinfachtes Modell betrachtet die Abhängigkeit des Preises p_n zur Zeit $n \in \mathbb{N}$ in Abhängigkeit von Angebot A_n und Nachfrage N_n . Dabei wird angenommen, dass das Angebot mit einer gewissen Verzögerung auf Änderungen des Preises reagiert:

$$N_n = a_1 + b_1 p_n \tag{1}$$

$$A_n = a_2 + b_2 p_{n-1} \tag{2}$$

Dabei ist natürlich $b_1 < 0$ (*„steigender Preis drückt die Nachfrage“*) und $b_2 > 0$ (*„steigender Preis führt mit Verzögerung zu erhöhtem Angebot“*).

Idealisierte Annahme: Der Markt befindet sich im Gleichgewicht, d.h. $N_n = A_n$. Dann erhält man eine Rekursion für p_n , nämlich

$$p_n = \frac{b_2}{b_1} p_{n-1} + \frac{a_2}{a_1} - a_2.$$

Frage: Existiert ein Gleichgewicht? Ist es stabil gegen Störungen?

1.1.4 Newtonsche Gesetze und Planetenbewegung

Newton entdeckte als erster, dass sich die Bewegung $x(t)$ eines Massepunktes durch eine Differentialgleichung beschreiben lässt. Die zeitliche Änderung des Impulses $p = m \cdot v$ ist gleich der Kraft, die auf den Massepunkt mit Masse m wirkt:

$$\frac{d}{dt}(mv) = F.$$

Bei konstanter Masse ist dies wegen $v = \frac{d}{dt}x(t) =: \dot{x}(t)$ äquivalent zur Gleichung

$$m\ddot{x}(t) = F(t).$$

Im Falle der Planetenbewegung wird die Kraft durch die Gravitation zwischen den einzelnen Planeten erzeugt, die Bewegungsgleichung lautet dann im einfachsten Fall (Bewegung eines Planeten um eine Sonne in $x = 0$)

$$\ddot{x}(t) = -\gamma \frac{x(t)}{|x(t)|^3},$$

wobei $\gamma \approx 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ die Gravitationskonstante ist. Bei n Körpern lauten die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}_i(t) = -\gamma \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{x_i(t) - x_j(t)}{|x_i(t) - x_j(t)|^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$n = 2$: o.k.

Interessant ist, dass Kepler (1571–1630) aus Beobachtungsdaten Eigenschaften der Lösung dieser Differentialgleichung fand, ohne die Differentialgleichung selbst zu kennen.

$n \geq 3$: “Dreikörperproblem”, noch viele offene Fragen, wann existieren beschränkte Lösungen, gibt es Kollisionen ?

1.1.5 Pendelgleichung

Ein anderes Beispiel zu Newtons Bewegungsgleichung ist das (mathematische) Pendel, bei dem eine Masse m an einer Schnur befestigt ist.

Hier ist die antreibende Kraft die Schwerkraft mg . Für den Auslenkungswinkel φ erhält man die Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{g}{l} \sin \varphi$$

Die Gleichung kann man als System 1. Ordnung

$$\begin{cases} \dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{g}{l} \sin \varphi \end{cases}$$

schreiben. Für kleine Auslenkungen φ setzt man manchmal auch $\sin \varphi \approx \varphi$ und erhält dann die lineare Gleichung

$$\begin{cases} \dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{g}{l} \varphi. \end{cases}$$

Diese Differentialgleichung (“physikalisches Pendel”) hat beispielsweise die explizite Lösung

$$\varphi(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right), \quad \omega(t) = -\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right),$$

entsprechend den (periodischen) Schwingungen des Pendels.

Frage: Wie sieht das bei der ursprünglichen nichtlinearen Gleichung aus ?

1.1.6 Ausbreitung einer Epidemie

Kermack und McKendrick haben 1927 ein mathematisches Modell formuliert, um den Verlauf einer Krankheitswelle zu erklären. Die Bevölkerung wird dazu in drei Gruppen eingeteilt:

- $S(t)$ sind nicht Infizierte, die aber nicht immun sind (“Suszeptible”)
- $I(t)$ sind Infizierte (ansteckend !!!)
- $R(t)$ ist der Rest (wieder gesund & immun, geimpft, in Quarantäne, tot, etc.)

Das Modell

$$\begin{cases} \dot{S} &= -\beta SI \\ \dot{I} &= \beta SI - \alpha I \\ \dot{R} &= \alpha I \end{cases}$$

mit $0 < \alpha, \beta < 1$ beruht auf den folgenden Annahmen:

1. Bei einer Gesamtzahl von N Personen begegnet jeder Infizierte pro Zeiteinheit im Durchschnitt βN (verschiedenen) Personen,
2. ein Bruchteil α aller Infizierten verlässt pro Zeiteinheit die Gruppe der Infizierten,
3. es gibt keine Zu- oder Abwanderung

Was kann man über die Lösungen des Kermack-McKendrick-Modells sagen ?

1. Beobachtung: Wenn wir I kennen, dann können wir R durch Integration berechnen:

$$R(t) = R(0) + \int_0^t \alpha I(s) ds.$$

Um S und I zu kennen, wird umgekehrt R nicht benötigt. Wir können uns also auf die Gleichungen

$$\begin{cases} \dot{S} &= -\beta SI \\ \dot{I} &= \beta SI - \alpha I \end{cases}$$

zurückziehen.

2. Beobachtung: Da $S, I \geq 0$, ist immer $\dot{S} < 0$. Andererseits ist $\dot{I} > 0$ genau dann, wenn $S > \alpha/\beta$. Daher nimmt I zu solange bis S auf den Wert α/β gesunken ist. Danach nimmt auch I ab und strebt schließlich gegen 0. So haben wir ohne Rechnen schon einiges über das *qualitative Verhalten* herausgefunden.

1.1.7 Räuber-Beute-Systeme

Volterra hat ein 1926 einfaches Modell entwickelt, um die Schwankungen der Fischpopulationen in der Adria zu erklären. Er betrachtet die Anzahl $x(t)$ der Beutetiere und die Anzahl $y(t)$ der Räuber, für die die Lotka-Volterra-Gleichung

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(\lambda - by) \\ \dot{y} &= y(-\mu + cx) \end{cases}$$

mit Parametern $\lambda, \mu, b, c > 0$ gelten soll. (Lotka hat unabhängig davon in den 20er Jahren ein ähnliches Modell aufgestellt).

Interpretation: Die Beute vermehrt sich mit Rate λ , wenn keine Räuber vorhanden sind ($y = 0$), die Räuber sterben mit Rate μ aus, wenn keine Beute auftaucht ($x = 0$). Die xy -Terme modellieren den Effekt des Aufeinandertreffens von Räuber und Beute ("positiv" für den Räuber, "negativ" für die Beute). Wir zeichnen das sogenannte *Richtungsfeld*, um eine Ahnung von den Lösungskurven der Differentialgleichung zu bekommen.

Frage: Existieren Oszillationen (periodische Lösungen)?

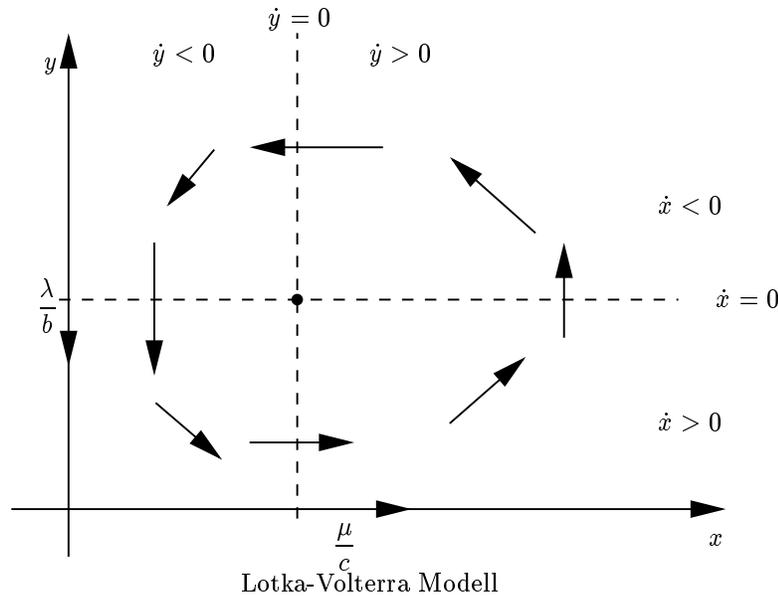
1.2 Explizite Lösungen

Lange Zeit (bis vor etwa 100 Jahren) hat man versucht, Differentialgleichungen explizit zu lösen.

In diesem Kapitel lernen wir dazu eine Handvoll Methoden kennen. Allerdings ist es für die meisten Differentialgleichungen nicht möglich, eine Lösung in geschlossener Form anzugeben. Das zeigt schon

Beispiel: : Direkte Integration

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t), & x \in \mathbb{R}^n \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$



hat die Lösung

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s) \, ds.$$

Für viele f wird man keine Stammfunktion explizit angeben können, dennoch ist die Integralformel für die Lösung $x(t)$ natürlich ungemein nützlich.

1.2.1 Trennung der Variablen

Für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t)g(x), & x \in \mathbb{R} \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \quad (3)$$

mit $f, g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ lässt sich die Lösung wie folgt ermitteln:

Wir nehmen zunächst an, wir hätten schon eine Lösung $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems (3) gefunden, für die gilt

$$g(x(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Teilen wir die Gleichung durch $g(x(t))$ und integrieren beide Seiten erhalten wir

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) \, d\tau}{g(x(\tau))} = \int_0^t f(\tau) \, d\tau,$$

und nach der Substitution $\xi = x(\tau)$, $d\xi = \dot{x}(\tau) \, d\tau$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_0^t f(\tau) \, d\tau.$$

Umgekehrt kann man aus dieser Relation die Lösung des Anfangswertproblems bestimmen:

Satz 1.1 (Trennung der Variablen)

- (i) Falls $g(x_0) = 0$, dann ist $x(t) \equiv x_0$ eine Lösung des Anfangswertproblems (3).

(ii) Falls $g(x_0) \neq 0$, dann existiert ein offenes Intervall $(-\delta, \delta)$ um $t = 0$, so dass das Anfangswertproblem (3) auf $(-\delta, \delta)$ genau eine Lösung besitzt.

Diese Lösung erhält man durch Auflösen der Gleichung

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

nach $x(t)$. ("lokale Existenz und Eindeutigkeit")

Beweis: (i) einfach nachrechnen

(ii) Wir wählen ein Intervall I um x_0 , so dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Wir können also für $x \in I$

$$G(x) := \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{g(\xi)}$$

definieren, d.h. G ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$, $G \in C^1(I, \mathbb{R})$ und $G(x_0) = 0$.

Weiter ist $G'(x_0) = \frac{1}{g(x_0)} \neq 0$, d.h. G ist lokal eindeutig invertierbar mit $G^{-1} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow I$. Es ist $G^{-1}(0) = x_0$ und $G^{-1} \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), I)$.

Setzen wir noch

$$F(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau,$$

dann können wir die Gleichung

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

auch schreiben als

$$G(x(t)) = F(t). \tag{4}$$

Da F stetig ist mit $F(0) = 0$, existiert ein $\delta > 0$, so dass $F(t) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ für $t \in (-\delta, \delta)$. Damit ist für $t \in (-\delta, \delta)$ Gleichung (4) äquivalent zu $x(t) = G^{-1}(F(t))$.

Durch Differentiation von (4) überprüft man, dass das so definierte $x(t)$ wirklich das Anfangswertproblem löst:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G(x(t)) &= G'(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = F'(t) \\ \iff \frac{1}{g(x(t))} \cdot \dot{x}(t) &= f(t). \end{aligned}$$

Auch der Anfangswert stimmt:

$$x(0) = G^{-1}(F(0)) = G^{-1}(0) = x_0.$$

Eindeutigkeit: Falls \tilde{x} eine andere Lösung des Anfangswertproblems wäre, dann gilt wie vor dem Satz gezeigt $G(\tilde{x}(t)) = F(t)$ und damit für $t \in (-\delta, \delta)$

$$\tilde{x}(t) = G^{-1}(F(t)) = x(t).$$

□

Bemerkung: Wir haben keine Eindeutigkeit gezeigt für den Fall $g(x_0) = 0$. Dazu braucht man etwas stärkere Voraussetzungen (Lipschitz-Stetigkeit). In Kürze mehr dazu....

Beispiel 1: Falls $f(t) \equiv 1$ gar nicht von t abhängt, so erhalten wir die Lösung der *skalaren* Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = g(x)$$

mit Anfangswert $x(0) = x_0$ durch Auflösen von

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{g(\xi)} = t$$

nach $x(t)$. Insbesondere sehen wir also nebenbei, dass in unserem Bevölkerungsmodell I.1.1 die Lösung $p(t) = p(0)e^{(g-s)t}$ eindeutig ist, wenn nur $p(0) \neq 0$ ist, denn für

$$\dot{x} = \alpha x, \quad x(0) = x_0$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{\alpha\xi} &= t \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{x(t)}{x_0}\right) &= t \\ \Leftrightarrow x(t) &= x_0 e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

Beispiel 2: Explosion (“blow up”)

Die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = x(t)^2$$

mit Anfangswert $x(0) = x_0$ lässt sich durch Trennung der Variablen lösen:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{\xi^2} &= \int_0^t d\tau \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} &= t \\ \Leftrightarrow x(t) &= \frac{1}{t - \frac{1}{x_0}} \end{aligned}$$

Für $x_0 > 0$ etwa existiert diese Lösung also nur bis $t_{max} = \frac{1}{x_0}$.

Beispiel 3: Lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung (siehe Übungsaufgabe)

Um die Gleichung

$$\dot{x} = a(t)x, \quad x(0) = x_0$$

die *linear in x* ist, zu lösen, berechnet man

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{\xi} &= \int_0^t a(\tau) d\tau \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x(t)}{x_0}\right) &= \int_0^t a(\tau) d\tau \\ \Leftrightarrow x(t) &= x_0 \cdot e^{\int_0^t a(\tau) d\tau}. \end{aligned}$$

1.2.2 Homogene Differentialgleichungen

Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = h\left(\frac{x}{t}\right), \quad x(0) = x_0,$$

mit einer stetigen Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lassen sich nach der Substitution $y(t) = \frac{x(t)}{t}$ mit der Methode der Trennung der Variablen lösen (\Rightarrow Übungsaufgabe).

1.2.3 Potenzreihenansatz

Man kann die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x) + h(t), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

auch in Form einer Potenzreihe suchen.

Beispiel: Für eine skalare Funktion $x(t)$ suchen wir die Lösung des AWP

$$\dot{x}(t) = x + t^2, \quad x(0) = 1.$$

Ansatz: $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ mit unbekanntem Koeffizienten a_n . Dann ist

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n.$$

Einsetzen in die Gleichung führt auf

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-a_n + (n+1)a_{n+1}) t^n = t^2.$$

Weiter gilt $x(0) = a_0 = 1$. Ein Koeffizientenvergleich liefert dann der Reihe nach

$$\begin{aligned} n=0: & \quad a_0 = a_1 & \Rightarrow a_1 = 1 \\ n=1: & \quad a_1 = 2a_2 & \Rightarrow a_2 = 1/2 \\ n=2: & \quad a_2 + 1 = 3a_3 & \Rightarrow a_3 = 1/2 \\ n=3, 4, \dots: & \quad a_n = (n+1)a_{n+1} & \Rightarrow a_{n+1} = \frac{3}{(n+1)!} \end{aligned}$$

In diesem speziellen Fall können wir aus der Potenzreihenentwicklung die Lösung $x(t) = 3e^t - t^2 - 2t - 2$ erraten und anschließend verifizieren, dass dies wirklich eine Lösung ist.

Den selben Ansatz kann man für $x \in \mathbb{R}^n$ machen, allerdings wird dann alles *viel* komplizierter, z.B. schon für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y). \end{aligned}$$

Mit den Entwicklungen

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \\ y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \\ f(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n f_{mn} x^n y^{n-m}, \\ g(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n g_{mn} x^n y^{n-m} \end{aligned}$$

kann man im Prinzip die Koeffizienten a_n, b_n rekursiv bestimmen, indem man polynomiale Gleichungen löst. Allerdings erfährt man auf diese Weise wenig oder gar nichts über die Eigenschaften der Lösungen. Oft ist noch nicht einmal die Konvergenz der Potenzreihe klar.

1.2.4 Lineare Differentialgleichungen

Lineare Gleichungen

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit einer $n \times n$ -Matrix A lassen sich auch (mehr oder weniger) explizit lösen. Diesen Gleichungen widmen wir später ein ganzes Kapitel.

2 Grundbegriffe der Dynamik

2.1 Vektorfelder und Flüsse

Das ganze Semester über werden wir dynamische Systeme in kontinuierlicher ($t \in \mathbb{R}$) oder diskreter Zeit ($n \in \mathbb{Z}$) betrachten.

Der Begriff des (*Phasen-Flusses*) erlaubt eine mathematisch präzise Beschreibung deterministischer Vorgänge in kontinuierlicher Zeit.

Definition: Sei

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto \Phi(t, x) =: \Phi_t(x) \end{aligned}$$

stetig differenzierbar und Φ_t für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus, d.h. eine bijektive, differenzierbare Abbildung, deren Umkehrfunktion ebenfalls differenzierbar ist. Φ heisst (**Phasen-Fluss**), falls gilt:

- (i) $\Phi_0(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$,
- (ii) $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Interpretation: Φ_s ordnet dem Zustand $x(0) = x_0$ eines Systems zur Zeit $t = 0$ den Zustand $\Phi_s(x_0)$ zur Zeit $t = s$ zu. Aus diesem Grund fasst man den Parameter t normalerweise als "Zeit" auf.

Bemerkung: Ganz analog kann man auch Flüsse auf kompakten Mannigfaltigkeiten definieren.

Beispiel: $\Phi_t(x) = e^{At}x$

Für reelle (oder komplexe) $n \times n$ -Matrizen kann man

$$e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (At)^n$$

definieren. Die Reihe konvergiert nach dem Majorantenkriterium absolut für alle $t \in \mathbb{R}$.

$\Phi(t, x) := e^{At}x$ ist ein Fluss, denn

- (i) $\Phi_0 = Id + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (0)^n = Id$.
- (ii) $\Phi_t \circ \Phi_s = e^{At} \circ e^{As} = e^{A(t+s)}$

zeigt man für Matrizen A genauso wie in Analysis I/II für skalare A durch Umordnen der Reihe.

Definition: Sei Φ_t ein Fluss auf $X = \mathbb{R}^n$. Die Menge

$$\gamma(x_0) := \{\Phi_t(x_0); t \in \mathbb{R}\} \subseteq X$$

heißt **Orbit** von x_0 (oder Bahnkurve durch x_0 , Trajektorie durch x_0).

Nimmt man die Zeit dazu, so heißt

$$I(x_0) := \{(t, \Phi_t(x_0)); t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times X$$

Integralkurve im erweiterten Phasenraum $\mathbb{R} \times X$.

Definition: Ein Punkt x_0 heißt **Gleichgewicht** (oder **Ruhelage** oder **stationärer Punkt**), falls $\gamma(x_0) := \{x_0\}$, d.h. falls $\Phi_t(x_0) = x_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Definition: Ein Punkt x_0 heißt **periodischer Punkt** mit (minimaler) Periode $p > 0$, falls $\Phi_p(x_0) = x_0$ und $\Phi_t(x_0) \neq x_0$ für alle $t \in (0, p)$. Der zugehörige Orbit heißt **periodischer Orbit**.

Satz 2.1 *Orbits schneiden sich nicht, d.h.*

$$\gamma(x_0) \cap \gamma(x_1) \neq \emptyset \implies \gamma(x_0) = \gamma(x_1).$$

Beweis: Sei $y \in \gamma(x_0) \cap \gamma(x_1)$. Dann ist

$$y = \Phi_{t_0}(x_0) = \Phi_{t_1}(x_1)$$

für Zeiten $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$. Also ist wegen der Flusseigenschaften

$$x_1 = \Phi_0(x_1) = \Phi_{-t_1+t_1}(x_1) = \Phi_{-t_1} \circ \Phi_{t_1}(x_1) = \Phi_{-t_1} \circ \Phi_{t_0}(x_0) = \Phi_{t_0-t_1}(x_0).$$

Dann ist aber jedes $x = \Phi_t(x_1) \in \gamma(x_1)$ wegen

$$x = \Phi_t(x_1) = \Phi_{t+t_0-t_1}(x_0)$$

auch im Orbit $\gamma(x_0)$ enthalten, also

$$\gamma(x_1) \subseteq \gamma(x_0).$$

Genauso zeigt man $\gamma(x_0) \subseteq \gamma(x_1)$ und daher $\gamma(x_1) = \gamma(x_0)$. Trajektorien sind also entweder disjunkt oder identisch. \square

2.1.1 Vom Fluss zur Differentialgleichung

Um zu verstehen, was Flüsse mit Gewöhnlichen Differentialgleichungen zu tun haben, benötigen wir den Begriff des Vektorfelds.

Definition: Ein **Vektorfeld** auf $X = \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Wenn F stetig, Lipschitz-stetig oder C^k ist, spricht man auch von einem C^0 -Lipschitz oder C^k -Vektorfeld.

Bemerkung: (für diejenigen, die wissen, was eine Mannigfaltigkeit ist)

Allgemeiner ist für eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ein Vektorfeld eine Abbildung

$$F : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$$

wobei $T\mathcal{M}$ das *Tangentialbündel* der Mannigfaltigkeit ist. Anschaulich gesprochen ordnet F also jedem $x \in \mathcal{M}$ ein Element des Tangentialraums $T_x\mathcal{M}$ zu.

Definition: Sei Φ ein Fluss auf $X = \mathbb{R}^n$. Wir nennen

$$f(x) := \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, x)|_{t=0} : X \rightarrow X$$

das Vektorfeld zum Fluss Φ .

Satz 2.2 (Vom Fluss zur Differentialgleichung) Sei Φ ein Fluss auf $X = \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in X$. Dann ist der Orbit $x(t) = \Phi_t(x_0)$ eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$.

Beweis: Wir rechnen nach: Für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_0) &= \frac{d}{dt} \Phi_{t_0}(x_0) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{t_0}(x_0) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\Phi_{t_0+h}(x_0) - \Phi_{t_0}(x_0)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\Phi_h(\Phi_{t_0}(x_0)) - \Phi_0(\Phi_{t_0}(x_0))) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(\Phi_{t_0}(x_0))|_{t=0} \\ &= f(\Phi_{t_0}(x_0)) = f(x(t_0)). \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Wir werden in Kapitel 3 sehen, dass für Lipschitz-stetige f auch umgekehrt jeder Differentialgleichung (zumindest lokal in t) ein Fluss Φ_t zugeordnet werden kann.

Beispiel: $\Phi_t(x) = e^{At}x$

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, x) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (At)^n x \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} n (At)^{n-1} Ax \right|_{t=0} \\ &= Ax, \end{aligned}$$

da nur der Term mit $n = 1$ bei $t = 0$ nicht verschwindet. Gliedweises Differenzieren der Reihe ist erlaubt, da sie absolut konvergiert auf ganz \mathbb{R} . Insbesondere löst $x(t) = e^{At}x_0$ daher das lineare Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = Ax, \quad x(0) = x_0.$$

Wie man e^{At} in der Praxis berechnen kann (ohne die Reihe), werden wir noch sehen.

2.1.2 Koordinatentransformationen

Manchmal ist es nützlich, ein Problem in neuen, geeigneteren Koordinaten zu untersuchen.

Sei Φ_t ein Fluss auf \mathbb{R}^n . Wechselt man die Koordinaten mit Hilfe eines Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \Psi(x) =: y, \end{aligned}$$

dann ist der transformierte Fluss in den neuen Koordinaten

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_t(y) &= (\Psi \circ \Phi_t \circ \underbrace{\Psi^{-1}(y)}_{\text{schreibe } y \text{ in } x\text{-Koordinaten}}) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{transportiere mit dem Fluss}} \\ &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{übersetze zurück in } y\text{-Koordinaten}} \end{aligned}$$

Lemma: $\tilde{\Phi}_t$ ist wirklich ein Fluss.

Beweis: $\tilde{\Phi}_t$ ist Diffeomorphismus als Verkettung von drei Diffeomorphismen.

Überprüfe noch die zwei Anforderungen an einen Fluss:

(i)

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_t \circ \tilde{\Phi}_s &= \Psi \circ \Phi_t \circ \Psi^{-1} \circ \Psi \circ \Phi_s \circ \Psi^{-1} \\ &= \Psi \circ \Phi_{t+s} \circ \Psi^{-1} \\ &= \tilde{\Phi}_{t+s}. \end{aligned}$$

(ii) $\tilde{\Phi}_0 = \Psi \circ \Phi_0 \circ \Psi^{-1} = \text{Id}$.

□

Satz 2.3 Das zum transformierten Fluss $\tilde{\Phi}_t$ gehörende Vektorfeld ist

$$\tilde{f}(y) = D\Psi(\Psi^{-1}(y)) \cdot f(\Psi^{-1}(y)).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Phi}(t, x) \right|_{t=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \Psi \circ \Phi(t, x) \circ \Psi^{-1} \right|_{t=0} \\ &= D\Psi(\Phi_t(\Psi^{-1}(y))) \cdot D\Phi_t(\Psi^{-1}(y)) \Big|_{t=0} \\ &= D\Psi(\Psi^{-1}(y)) \cdot f(\Psi^{-1}(y)). \end{aligned}$$

□

Definition: Lassen sich die Flüsse Φ_t und $\tilde{\Phi}_t$ durch einen C^k -Diffeomorphismus Ψ ineinander überführen, so heißen Φ_t und $\tilde{\Phi}_t$ C^k -**äquivalent**.

Bemerkung:

1. Vorsicht! Möglicherweise verliert man bei einem Koordinatenwechsel Differenzierbarkeit:

$$f, \Phi_t, \Psi \in C^k \implies \tilde{f} \in C^{k-1}.$$

2. Ziel ist es natürlich, eine Koordinatentransformation so zu finden, dass \tilde{f} eine besonders einfache Form hat. Diesen Gedanken werden wir später bei den Themen "Linearisierung" und "Normalformen" wieder aufgreifen.
3. Direkt für Differentialgleichungen können wir auch wie folgt rechnen: Mit $y = \Psi(x)$ gilt nach der Kettenregel

$$\dot{y} = D\Psi(x)\dot{x} = D\Psi(\Psi^{-1}(y)) \cdot f(\Psi^{-1}(y)).$$

Beispiel: $\Phi(t, x) = e^{At}x$ Betrachte mal wieder den linearen Fluss $\Phi(t, x) = e^{At}x$ auf $X = \mathbb{R}^n$. Wähle auch die Koordinatentransformation $\Psi(x) = Tx$ mit einer invertierbaren Matrix T linear. Dann lautet der transformierte Fluss

$$\tilde{\Phi}(t, x) = Te^{At}T^{-1}x = e^{TAT^{-1}}x.$$

Der Koordinatenwechsel transformiert also die Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax$$

in die Differentialgleichung

$$\dot{y} = TAT^{-1}y.$$

Sinnvoll ist beispielsweise, als TAT^{-1} die Jordan-Normalform von A zu wählen.

Man kann nun noch zeigen: Sind A und B zwei $n \times n$ -Matrizen und ist $\Phi(t, x) = e^{At}x$ äquivalent zu $\tilde{\Phi}(t, x) = e^{Bt}x$ vermöge Ψ , dann muss Ψ eine lineare Abbildung sein.

Daher sind $\Phi_t = e^{At}$ und $\tilde{\Phi}_t = e^{Bt}$ äquivalent genau dann, wenn die Matrizen A und B ähnlich sind: $B = TAT^{-1}$.

2.2 Nichtautonome Differentialgleichungen und Evolutionen

Definition: Eine Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad x \in X = \mathbb{R}^n$$

bei der die rechte Seite auch von der Zeit t abhängt, heisst **nichtautonome Differentialgleichung**.

Beispielsweise kann in unserem einfachen Wachstumsmodell

$$\dot{p}(t) = \alpha p(t)$$

die Wachstumsrate α durchaus von der Zeit abhängen (Umwelteinflüsse).
Das Pendant zum Begriff des Flusses ist die sogenannte Evolution:

Definition: Ein Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X &\rightarrow Y \\ (t, s, x) &\mapsto \Phi(t, s, x) =: \Phi_{t,s}(x) \end{aligned}$$

heißt **Evolution**, falls die beiden Bedingungen

- (i) $\Phi_{s,s}(x) = x \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall x \in X,$
- (ii) $\Phi_{t,s} \circ \Phi_{s,r} = \Phi_{t,r}$

erfüllt sind.

Anschaulich: $\Phi_{t,s}$ beschreibt, wie man vom Zustand zur Zeit s zum Zustand zur Zeit t gelangt.
Das zugehörige nichtautonome Vektorfeld ist dann

$$f(s, x) := \frac{d}{dt} \Phi_{t+s,s}(x)|_{t=0}.$$

Man hält also s fest und betrachtet den Fluss $\hat{\Phi}_t(x) = \Phi_{t+s,s}(x)$.

Nichtautonome Dynamische System sind nicht wirklich etwas Neues, sondern nur ein Spezialfall autonomer Dynamischer Systeme.

Betrachte dazu zu einer gegebenen Evolution $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ den **erweiterten Phasenraum** $\tilde{X} = X \times \mathbb{R}$ und den Fluss

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times \tilde{X} &\rightarrow \tilde{X} \\ (t, (x, \tau)) &\mapsto (\Phi_{t+\tau,\tau}(x), t + \tau). \end{aligned}$$

Analog kann man die nicht-autonome Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$ mit $x \in X$ umschreiben als autonome Gleichung

$$\begin{cases} \dot{\tau} = 1 \\ \dot{x} = f(\tau, x) \end{cases}$$

mit $(\tau, x) \in \tilde{X}$. Zu zeigen ist natürlich:

- $\tilde{\Phi}$ ist tatsächlich ein Fluss und
- $\tilde{f} = (f(\tau, x), 1)$ ist das zugehörige (autonome) Vektorfeld auf \tilde{X} . Dabei ist

$$f(\tau, x) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{t+\tau,\tau}(x)|_{t=0}.$$

Siehe Übungsaufgabe !!!

2.3 Diskrete Dynamische Systeme

Lässt man nur diskrete Zeiten $n \in \mathbb{Z}$ zu, d.h.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto \Phi(n, x) =: \Phi_n(x) \end{aligned}$$

dann gilt wegen Eigenschaft (ii) von Phasenflüssen

$$\Phi_n = (\Phi_1)^n := \underbrace{\Phi_1 \circ \Phi_1 \circ \dots \circ \Phi_1}_{n\text{-mal}}$$

und

$$\Phi_{-1} = (\Phi_1)^{-1}.$$

Φ heisst **dynamisches System in diskreter Zeit** und ist bestimmt durch den Diffeomorphismus Φ_1 .

Beispiel: Logistische Abbildung Eine sehr interessante Abbildung ist die sogenannte *logistische Abbildung*:

$$\begin{aligned} F_a : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ F_a(x) &= ax(1-x) \end{aligned}$$

mit einem Parameter $a \in [0, 4]$. Schon an dieser einfachen Abbildung kann man viele Aspekte **komplizierter Dynamik** studieren. Dazu gehören Periodenverdopplungs-Kaskaden, chaotisches Verhalten und invariante Maße.

Beispiel: Diskretisierung Aus einem kontinuierlichen dynamischen System kann man ein diskretes dynamisches System erhalten, indem man sich auf Zeiten $t \in \mathbb{Z}$ einschränkt ("Stroboskop"). Ähnlich machen numerische Verfahren aus einem kontinuierlichen dynamischen System ein diskretes dynamisches System. So hat schon Euler die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit Anfangswert $x(0) = x_0$ ersetzt durch die Abbildung

$$x_{n+1} = x_n + hf(nh, x_n).$$

In gewisser Weise kann man umgekehrt viele numerische Verfahren als Zeit-1-Abbildung eines dynamischen Systems in kontinuierlicher Zeit betrachten ("Rückwärtsanalyse"). Allerdings ist es (fast) nie die Zeit-1-Abbildung des Systems, das man eigentlich modelliert, sondern die Zeit-1-Abbildung eines anderen, leicht gestörten Systems.

Für diskrete dynamische Systeme gelten ganz analoge Definitionen wie im kontinuierlichen Fall:

Definition: Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Dann heisst

$$\gamma(x) = \{\Phi^n(x); n \in \mathbb{Z}\}$$

der **Orbit** von x .

x heisst **Fixpunkt**, falls $\Phi(x) = x$ und **p-periodischer Punkt**, falls $x = \Phi^p(x)$.

Zwei Diffeomorphismen Φ und $\tilde{\Phi}$ heißen **C^k -konjugiert** (oder **C^k -äquivalent**), falls ein C^k -Diffeomorphismus Ψ existiert, so dass

$$\tilde{\Phi} = \Psi \circ \Phi \circ \Psi^{-1}.$$

2.4 Erhaltungsgrößen und Hamilton-Systeme

Definition: Die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

besitzt ein **Erstes Integral** $I \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, falls entlang Lösungen $x(t)$ gilt:

$$\frac{d}{dt}I(x(t)) = 0,$$

d.h. $I(x(t)) = \text{const.}$, I ist also eine **Erhaltungsgröße**.

Natürlich ist $I \equiv c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Erhaltungsgröße, interessant sind daher nur *nichttriviale* Erste Integrale, das sind solche, für die

$$\nabla I(x) = 0 \iff f(x) = 0$$

gilt.

Beispiel: Volterra-Lotka-Gleichung

Wir betrachten wie in 1.1.7

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(\lambda - by) \\ \dot{y} &= y(-\mu + cx) \end{cases}$$

mit Parametern $\lambda, \mu, b, c > 0$.

Behauptung: $I(x, y) := cx - \mu \ln x + by - \lambda \ln y$ ist ein nichttriviales Erstes Integral, denn:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(x, y) &= \frac{\partial I}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial I}{\partial y}\dot{y} \\ &= (c - \frac{\mu}{x})(\lambda x - bxy) + (b - \frac{\lambda}{y})(-\mu y + cxy) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nichttrivial:

$$\nabla I(x, y) = \begin{pmatrix} c - \frac{\mu}{x} \\ b - \frac{\lambda}{y} \end{pmatrix} = 0 \iff \dot{x} = \dot{y} = 0.$$

In diesem Fall erhält man mit Hilfe des 1. Integrals I sofort die Lösungskurven der Differentialgleichung.

2.4.1 Hamilton-Systeme

Eine Klasse wichtiger Beispiele sind die sogenannten *Hamilton-Systeme*.

Gegeben sei dazu eine Funktion $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$. Wir schreiben $H = H(p, q)$ mit $p, q \in \mathbb{R}^n$ und konstruieren das Vektorfeld

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q), & i &= 1, 2, \dots, n \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q), & i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

H heißt dann *Hamiltonfunktion*.

Alternative Schreibweisen:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\nabla_q H(p, q), & i &= 1, 2, \dots, n \\ \dot{q}_i &= \nabla_p H(p, q), & i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

oder noch kürzer mit $x = (p, q)^T$

$$\dot{x} = J\nabla H(x),$$

wobei

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -Id_n \\ Id_n & 0 \end{pmatrix}$$

eine $(2n) \times (2n)$ -Matrix ist.

Notation: Gradienten sind (in dieser Vorlesung) *immer* Spaltenvektoren, bei einer Koordinatentransformation $x = \Phi(y)$ transformiert sich der Gradient von $\tilde{H}(y) := H(\Phi(y))$ also wie folgt:

$$\nabla_y \tilde{H}(y) = D\Phi(y)^T \nabla_x H(x) = D\Phi(y)^T \nabla_x H(\Phi(y)).$$

Hamilton-Systeme (allerdings mit $p \in \mathcal{M}$ Mannigfaltigkeit) beschreiben die gesamte klassische Mechanik, unter anderem Pendel, Mehrkörperproblem, starrer Körper, etc.

Oft ist H von der speziellen Form

$$H(p, q) = \underbrace{T(p, q)}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{V(p, q)}_{\text{potenzielle Energie}}$$

mit

$$T(p, q) = T(p) = \frac{1}{2} p^T p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2$$

und $V(p, q) = V(q)$ nur abhängig vom Ort q . Dies erklärt auch, warum die q_i *Ortsvariablen* und die p_i *Impulsvariablen* heissen.

Beispiel: Masseteilchen im \mathbb{R}^3

Ohne Einwirkung einer äußeren Kraft ist die potenzielle Energie $V(q) = 0$ konstant, also lautet die Hamilton-Funktion

$$H(p, q) = \frac{1}{2} p^T p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 p_i^2.$$

Die zugehörige Differentialgleichung ist dann

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) = 0, \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q) \Rightarrow \ddot{q}_i = 0 \end{aligned}$$

für $i = 1, 2, 3$.

Mit einer äußeren Kraft $F(q) = -\nabla V(q)$ erhält man analog die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} = \dot{p} = F(q).$$

Satz 2.4 H ist ein nichttriviales Erstes Integral, mit anderen Worten: die Energie bleibt erhalten.

Beweis: durch Nachrechnen.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(p, q) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

H ist nichttrivial:

$$\nabla H = 0 \iff J\nabla H = 0 \iff f(x) = J\nabla H = 0.$$

□

Beispiel: Mathematisches Pendel(siehe 1.1.5)

Setzen wir der Einfachheit halber in der Pendelgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{g}{l} \sin \varphi(t)$$

$g = l$, dann wird die Energie $H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 - \cos q$ erhalten, wobei $q = \varphi$ und $p = \dot{q}$. Auch hier sind die Trajektorien durch die Energieerhaltung bereits bestimmt: Die Energieniveaus $H = \text{const.}$ sind Kurven und entsprechen jeweils einer oder mehreren Orbits. Wegen

$$p = \pm \sqrt{2(H + \cos q)}$$

sind die Energieflächen symmetrisch zur q -Achse und 2π -periodisch in q . Ausserdem ist offensichtlich immer $H \geq -1$. Weiter unterscheiden wir:

- $H = -1$ entspricht den Ruhelagen $p = 0$, $q = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

- $-1 < H < 1$ führt auf geschlossene Kurven, die für $H \approx -1$ fast wie Kreise mit Radius $\sqrt{2(H+1)}$ aussehen, denn nahe $p = q = 0$ ist

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 - \cos q = \frac{1}{2}p^2 - 1 + \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{24}q^4 + \dots$$

- $H = 1$ ergibt zwei unbeschränkte Kurven, die sich in den Punkten $p = 0, q = (2k + 1)\pi$ schneiden. Diese Schnittpunkte sind Gleichgewichte, sie werden durch **heterokline Orbits** verbunden. Anschaulich entsprechen die Gleichgewichte dem kopfstehenden Pendel im (instabilen) Gleichgewicht.
- $H > 1$ führt auf eine Kurve mit $p > 0$ (“+”-Zeichen der Wurzel) und eine dazu spiegelbildliche Kurve mit $p < 0$ (“-”-Zeichen der Wurzel). Anschaulich entsprechen diese Lösungskurven dem sich überschlagenden Pendel.

Da die heteroklinen Orbits Gebiete mit qualitativ unterschiedlichem Verhalten trennen, werden sie oft auch als **Separatrizen** bezeichnet.

2.5 Nichtlineare Pendel [Arnold, S.140–152]

Wir können diese Betrachtungen noch etwas systematischer durchführen: Dazu zeigen wir, wie man die Trajektorien von nichtlinearen Pendelgleichungen

$$\ddot{x} + g(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

für eine glatte Funktion g bestimmt. Bezeichnen wir mit $y := \dot{x}$ die Ableitung von x , dann ist wieder $H(x, y) := \frac{1}{2}y^2 + G(x)$ mit einer Stammfunktion G von g ein erstes Integral. Wir sammeln Informationen, mit deren Hilfe wir das Phasenportrait zeichnen können:

1. Gleichgewichtslagen sind genau die Punkte $(x, 0)$, für die $g(x) = 0$ ist.
2. Ausserhalb der Gleichgewichtslagen ist jede Niveaumenge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; H(x, y) = E\}$ eine glatte Kurve, genauer:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x) = E$$

läßt sich in der Nähe eines nicht-stationären Punktes (x_0, y_0) mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen nach x oder nach y auflösen. Es ist nämlich immer

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) = y_0 \neq 0$$

oder

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x_0, y_0) = g(x_0) \neq 0$$

falls (x_0, y_0) kein Gleichgewicht ist.

3. Das Phasenportrait ist symmetrisch zur x -Achse.

Bei den Gleichgewichten kommt es im wesentlichen nur auf das Vorzeichen von g' an.

Betrachte zunächst lineare Funktionen $g(x) = ax$:

In diesem Fall ist $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{a}{2}x^2$. Für $a > 0$ sind also die Niveaumengen $\{H(x, y) = E\}$ mit $E > 0$ Ellipsen, während sie für $a < 0$ und $e \neq 0$ Hyperbeln sind. Für $E = 0$ erhält man im Fall $a > 0$ nur den Punkt $(0, 0)$, während sich für $a < 0$ zwei Geraden ergeben.

Wir wollen nun zeigen, dass das Phasenportrait in der Nähe von Gleichgewichten (bis auf einen Diffeomorphismus) so aussieht wie in einem dieser Bilder.

Hierfür machen wir noch eine zusätzliche Voraussetzung, die für “typische” Funktionen g erfüllt ist.

Annahme: Die Nichtlinearität g besitzt nur einfache Nullstellen, d.h. $g(x) = 0 \Rightarrow g'(x) \neq 0$.

Lemma: Sei $x = 0$ eine einfache Nullstelle der Funktion $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Weiter sei G eine Stammfunktion von g mit $G(0) = 0$. Dann existiert ein lokaler Diffeomorphismus $\xi = \xi(x)$, der die Funktion $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$ in

$$\tilde{H}(\xi, y) = \frac{1}{2}y^2 + \text{sign}(G''(0))\xi^2.$$

überführt.

Beweis: Wir konstruieren zunächst den lokalen Diffeomorphismus. Da $g(0) = 0$ gilt, können wir die Stammfunktion G so wählen, dass

$$G(0) = G'(0) = 0 \text{ und } G''(0) \neq 0$$

ist. Dann ist wegen $G(0) = 0$

$$\begin{aligned} G(x) &= G(x) - G(0) = G(\theta x)|_{\theta=0}^1 \\ &= \int_0^1 x G'(\theta x) d\theta \\ &= x \int_0^1 G'(\theta x) d\theta \\ &= x \int_0^1 g(\theta x) d\theta \\ &= x \tilde{G}(x) \end{aligned}$$

Da auch $G'(0) = g(0) = 0$ ist, können wir denselben Trick noch einmal anwenden und erhalten

$$\tilde{G}(x) = x \hat{G}(x) \implies G(x) = x^2 \hat{G}(x).$$

Wegen

$$G''(x) = x^2 \hat{G}''(x) + 4x \hat{G}'(x) + 2\hat{G}(x)$$

ist also $\hat{G}(0) = \frac{1}{2}G''(0) \neq 0$. Wir setzen nun

$$\begin{aligned} \xi(x) &:= \text{sign}(x) \cdot \sqrt{|G(x)|} \\ &= \text{sign}(x) \cdot \sqrt{|x^2 \hat{G}(x)|} \\ &= |x| \text{sign}(x) \cdot \sqrt{|\hat{G}(x)|} \\ &= x \cdot \sqrt{|\hat{G}(x)|}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist dann

$$\xi^2 = x^2 \hat{G}(x) \text{sign}(\hat{G}(x)) = G(x) \text{sign}(\hat{G}(x)).$$

Zu zeigen ist noch, dass diese Koordinatentransformation tatsächlich das Gewünschte bewirkt und dass sie ein Diffeomorphismus ist. Es gilt

$$g \in C^2 \Rightarrow G \in C^3 \Rightarrow \tilde{G} \in C^2 \Rightarrow \hat{G} \in C^1.$$

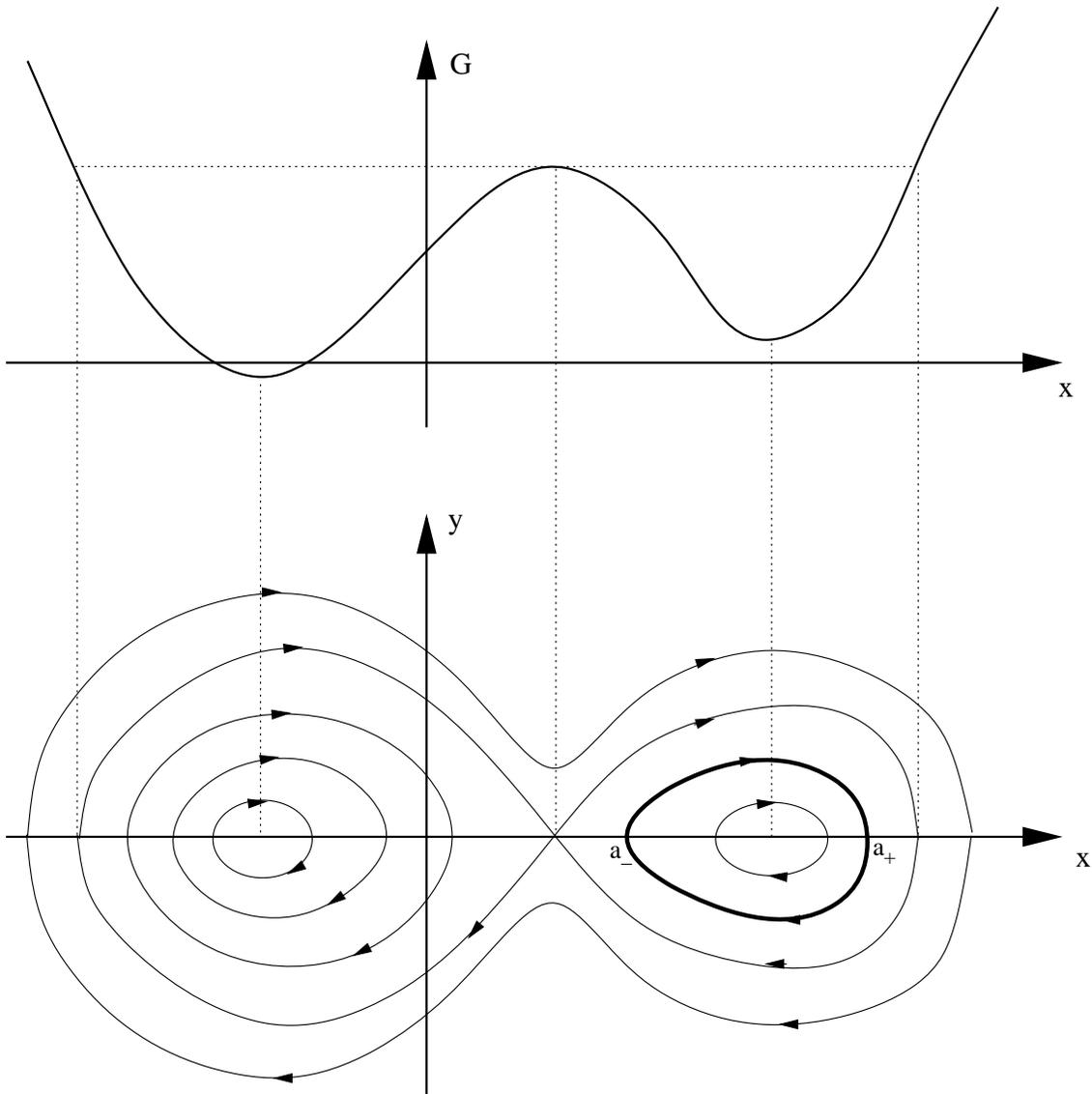
Wegen $\hat{G}(0) \neq 0$ ist daher $\xi \in C^1$ in einer Umgebung von $x = 0$. Weiter ist

$$\frac{d\xi}{dx}(0) = \sqrt{|\hat{G}(0)|}$$

damit ist ξ in einer Umgebung von $x = 0$ auch invertierbar.

Schließlich ist in einer Umgebung von $x = 0$ wegen $\text{sign}(\hat{G}(0)) = \text{sign}(G''(0))$ dann

$$\tilde{H}(\xi, y) = H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x) = \frac{1}{2}y^2 + \text{sign}(G''(0))\xi^2.$$

Abbildung 1: Das Phasenportrait von $\ddot{x} + g(x) = 0$

□

Bemerkung: Die Gleichgewichte mit $g' < 0$ nennt man **Sattelpunkte**. Wenn man sich die Niveaulinien als Gebirge über der x - y -Ebene vorstellt, dann sind dies kritische Punkte, die kein Extremum sind. Analog sind die Gleichgewichte mit $g' > 0$ **Zentren**. Dort ist ein lokales Minimum der Energie.

1. Finde zuerst alle Nullstellen von g und entscheide, welche davon vom Sattel-Typ ($g' < 0$) und welche vom Zentrums-Typ ($g' > 0$) sind.
2. Finde anhand des Graphen von G heraus, zu welchen der Gleichgewichte ein homokliner Orbit existiert. Ganz allgemein kann man aus dem Graphen von G ablesen, welche x -Werte die Trajektorie durch den Punkt $(x_0, 0)$ annimmt.
3. Vervollständige das Phasenportrait durch die periodischen und die unbeschränkten Orbits. Dabei ist es nützlich zu beachten, dass eine Trajektorie, als Graph über der x -Achse betrachtet, ihre Extrema genau dort annimmt, wo auch G seine Extrema annimmt, also über den Nullstellen von g .

Bemerkung: Von den periodischen Orbits kann man im Prinzip durch Integration die Periode berechnen. Erinnert man sich daran, dass eigentlich $y = \dot{x}$ ist, dann kann man $H(x, y) = E$ umformen in

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(E - G(x))},$$

und durch Trennung der Variablen lösen. Beispielsweise erhält man für den in Bild 1 dick eingezeichneten periodischen Orbit mit Periode p die Beziehung

$$\frac{p}{2} = \int_{a_-}^{a_+} \frac{d\xi}{\sqrt{2(G(a_-) - G(\xi))}}.$$

2.6 Euler-Multiplikatoren

Im \mathbb{R}^2 findet man manchmal wie folgt ein erstes Integral: Falls für die rechte Seite von

$$\begin{cases} \dot{x} &= g(x, y) \\ \dot{y} &= h(x, y) \end{cases}$$

und eine Funktion $V(x, y) \in C^2$ gilt, dass

$$g(x, y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) \text{ und } -h(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}(x, y)$$

dann ist

$$\frac{d}{dt}V(x, y) = V_x(x, y)g(x, y) + V_y(x, y)h(x, y) = 0.$$

Andererseits kann wegen $V_{xy} = V_{yx}$ ein solches V nur existieren, falls

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial y}.$$

In diesem Fall kann man umgekehrt V explizit bestimmen, zum Beispiel durch ein geeignetes Wegintegral, siehe [Amann, I.5].

Man kann mit der *Methode der partiellen Integration* auch zunächst aus der Relation $g(x, y) = V_y$ das *Potential* V bis auf einen nur von x abhängigen Anteil durch Integration bestimmen

$$V(x, y) = \int g(x, y) dy + \tilde{V}(x)$$

und anschließend $\tilde{V}(x)$ mit Hilfe der zweiten Gleichung $V_x = -h$ berechnen.

Beispiel: Für eine Differentialgleichung der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(y) \\ \dot{y} &= h(x) \end{aligned}$$

ist $V(x, y) = G(y) - H(x)$ mit Stammfunktionen G, H von g, h ein erstes Integral.

Manchmal findet man leichter eine Lösung einer Differentialgleichung oder ein erstes Integral, wenn man alle Komponenten der rechten Seite einer Differentialgleichung mit demselben Faktor multipliziert. Dies ändert die Bahnkurven nicht (wohl aber deren Parametrisierung):

Satz 2.5 (und Definition) Sei $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann stimmen die Trajektorien der beiden Systeme von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

und

$$\dot{y} = \alpha(y)f(y)$$

überein. α heißt **Euler-Multiplikator**.

Beweis: Sei $x(t)$ eine Lösung des oberen Systems und

$$\dot{\gamma}(t) = \alpha(\gamma(t)).$$

Eine solche Lösung kann man (zumindest lokal in t) beispielsweise durch Trennung der Variablen erhalten. Dann ist $y(t) = x(\gamma(t))$ eine Lösung des unteren Systems, da ja

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= \frac{d}{d\gamma}(x(\gamma(t)))\dot{\gamma}(t) \\ &= f(x(\gamma(t)))\alpha(\gamma(t)) \\ &= f(y(t))\alpha(y(t)). \end{aligned}$$

□

Beispiel: Während beim *harmonischen Oszillator*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

die Lösungen

$$x(t) = a \cos t + b \sin t, \quad y(t) = -a \sin t + b \cos t$$

alle periodisch mit derselben Periode 2π sind, besitzt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2 + y^2)y \\ \dot{y} &= -(x^2 + y^2)x \end{aligned}$$

als Lösungskurven ebenfalls Kreise, durch Transformation in Polarkoordinaten $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$ mit

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= 0 \\ \dot{\phi} &= -\rho^2 \end{aligned}$$

sehen wir aber, dass die Periode $p = \frac{2\pi}{\rho^2}$ auf verschiedenen periodischen Orbits unterschiedlich ist.

Für zweidimensionale Systeme

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x, y) \\ \dot{y} = h(x, y) \end{cases}$$

kann man mit einem geschickt gewählten Euler-Multiplikator $M(x, y)$ manchmal erreichen, dass

$$(Mg)_x + (Mh)_y = 0$$

so dass man ein erstes Integral V mit $V_x = Mg$ und $V_y = -Mh$ findet. In diesem Fall heißt $M(x, y)$ **integrierender Faktor**.

Beispiel: Beim Volterra-Lotka-System ist $\frac{1}{xy}$ ein integrierender Faktor. Multiplikation mit $\frac{1}{xy}$ führt nämlich auf das System

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\lambda}{y} - b \\ \dot{y} = -\frac{\mu}{x} + c \end{cases}$$

dem man das Erste Integral $I(x, y) = cx - \mu \ln x + by - \lambda \ln y$ leicht “ansehen” kann.

Beispiel: Wenn man (durch Hinsehen, göttliche Eingebung oder einen Hinweis auf dem Übungsblatt) weiss, dass die Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 + 2 \ln y) \\ \dot{y} = -2y \ln y \end{cases}$$

einen nur vom Produkt $x \cdot y$ abhängigen integrierenden Faktor besitzt, dann kann man diesen suchen, indem man die Bedingung $(Mg)_x = -(Mh)_y$ als Differentialgleichung für M auffasst:

$$(1 + 2 \ln y)M(x, y) + xy(1 + 2 \ln y)M'(xy) = 2(1 + \ln y)M(x, y) + 2xy \ln y M'(xy).$$

Damit ist $M(xy) = xy$ integrierender Faktor und $V(x, y) = (xy)^2 \ln y$ ein Erstes Integral.

3 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

3.1 Existenz

3.1.1 Der Banachsche Fixpunktsatz

Zur Erinnerung:

Definition: Ein **Banachraum** ist ein vollständiger normierter Raum.

Beispiele:

1. \mathbb{R}^n ist mit jeder beliebigen Norm ein Banachraum.
2. \mathbb{Q} mit der üblichen Metrik ist ein metrischer Raum, aber kein Banachraum, da Cauchy-Folgen keinen Grenzwert in \mathbb{Q} haben müssen.
3. Die Menge

$$BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) := \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m); \exists M > 0 : \|f(x)\|_{C^0} \leq M \forall x \in \mathbb{R}\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{C^0} := \sup_{x \in K} |f(x)|_{\mathbb{R}^m}$$

ist ein Banachraum. Dabei kann man für $|\cdot|_{\mathbb{R}^m}$ irgendeine der (äquivalenten) Normen auf dem \mathbb{R}^n wählen. Die C^0 -Norm entspricht der *gleichmäßigen* Konvergenz: Falls die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C^0} = 0$.

4. Falls K eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n ist, dann ist die Menge aller stetigen Abbildungen $C^0(K, \mathbb{R}^m)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{C^0}$ ein Banachraum.

Bemerkung: $\|\cdot\|_{C^0}$ ist tatsächlich eine Norm, denn

1. $\|f\|_{C^0} \geq |f(x_0)|_{\mathbb{R}^m} \geq 0$ für jedes beliebige $x_0 \in K$. Gleichheit gilt aber nur, falls $|f(x_0)|_{\mathbb{R}^m} = 0$ für alle $x_0 \in K$, d.h. $f = 0$.
2. $\|\lambda f\|_{C^0} = \sup_{x \in K} |\lambda f(x)|_{\mathbb{R}^m} = |\lambda| \cdot \|f\|_{C^0}$.
3. Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{C^0} &= \sup_{x \in K} |f(x) + g(x)|_{\mathbb{R}^m} \\ &\leq \sup_{x \in K} |f(x)|_{\mathbb{R}^m} + \sup_{x \in K} |g(x)|_{\mathbb{R}^m} \\ &= \|f\|_{C^0} + \|g\|_{C^0} \end{aligned}$$

Vollständigkeit ergibt sich aus der Tatsache (siehe Analysis I/II), dass eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen gegen eine stetige Funktion konvergiert.

Die (für uns) wesentliche Eigenschaft eines Banachraums besteht darin, dass jede Kontraktion einen Fixpunkt besitzt.

Satz 3.1 (Banachscher Fixpunktsatz) Sei X ein Banachraum, $E \subseteq X$ eine offene Teilmenge und

$$T : \overline{E} \rightarrow \overline{E}$$

eine gleichmäßige Kontraktion, d.h. es existiert ein $\varrho < 1$, so dass

$$\|T(x) - T(y)\|_X \leq \varrho \|x - y\|_X.$$

Dann besitzt die Abbildung T genau einen Fixpunkt x_* in \overline{E} .

Beweis: Der Beweis ist konstruktiv. Man zeigt nämlich, dass für jeden Anfangswert $x_0 \in \overline{E}$ die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} := T(x_n)$$

gegen x_* konvergiert. Dazu genügt es wegen der Vollständigkeit von X nachzuweisen, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Zunächst ist

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|T(x_n) - T(x_{n-1})\| \leq \varrho \|x_n - x_{n-1}\| \leq \varrho^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \leq \dots \leq \varrho^n \|x_1 - x_0\|.$$

Damit erhalten wir für $n > m$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \dots + \|x_{m+1} - x_m\| \\ &\leq \varrho^{n-1} \|x_1 - x_0\| + \varrho^{n-2} \|x_1 - x_0\| + \dots + \varrho^m \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \varrho^m \|x_1 - x_0\| \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^k \\ &= \frac{\varrho^m}{1 - \varrho} \|x_1 - x_0\| \rightarrow 0 \quad \text{für } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Also bilden die x_n eine Cauchyfolge, die gegen x_* konvergiert. Es gilt dann

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & T(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x_* & = & T(x_*), \end{array}$$

da T als Kontraktion automatisch (Lipschitz)-stetig ist.

Der Fixpunkt ist eindeutig:

Für zwei Fixpunkte x_* und \tilde{x}_* gilt

$$\begin{aligned} |x_* - \tilde{x}_*| &= |T(x_*) - T(\tilde{x}_*)| \leq \varrho |x_* - \tilde{x}_*| \\ \Rightarrow |x_* - \tilde{x}_*| &= 0 \\ \Rightarrow x_* &= \tilde{x}_*. \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Den Banachschen Fixpunktsatz kann man auch als Aussage über das asymptotische Verhalten einer Klasse von diskreten dynamischen Systemen auffassen.

3.1.2 Der Satz von Picard-Lindelöf

In diesem Kapitel wird der grundlegende Existenz- und Eindeutigkeitsatz für Gewöhnliche Differentialgleichungen bewiesen. Er gibt leicht nachprüfbare Bedingungen für f an, aus denen eine lokal eindeutige Lösung des Anfangswertproblems folgt.

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **global Lipschitz-stetig** (oder gleichmäßig Lipschitz-stetig), falls eine Konstante L existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **lokal Lipschitz-stetig**, falls für jedes $x \in \Omega$ eine Umgebung U_x existiert, so dass f in dieser Umgebung gleichmäßig Lipschitz-stetig ist. Die Lipschitz-Konstante L darf dabei vom Punkt x abhängen.

Beispiele:

- Stetig differenzierbare Funktionen sind lokal Lipschitz-stetig, denn für y, z aus einer konvexen Umgebung U von x gilt:

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(z)\| &= \left\| \int_0^1 Df(z + \theta(y - z)) \, d\theta \cdot (y - z) \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|Df(z + \theta(y - z))\| \, d\theta \|y - z\| \\ &\leq \sup_{\xi \in U} \|Df(\xi)\| \cdot \|y - z\|. \end{aligned}$$

- $f(x) = \sqrt{x}$ ist gleichmäßig Lipschitz auf $[1, \infty)$, aber nur lokal Lipschitz auf $(0, \infty)$.

Lemma: Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitz-stetig und $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann ist f auf K gleichmäßig Lipschitz-stetig. (\rightarrow **Übungsaufgabe**)

Beweis: Zu jedem $x \in K$ gibt es eine Umgebung U_x , in der f gleichmäßig Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante L_x . Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die $U_x = B_{r_x}(x)$ Kugeln mit Radien r_x sind. Wir setzen nun $V_x := B_{r_x/2}(x)$, die V_x sind also Kugeln mit kleinerem Radius. Diese Umgebungen V_x überdecken ganz K . Wegen der Kompaktheit von K reichen schon endlich viele Umgebungen $V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_N}$ aus, um K zu überdecken. Sei $L := \max\{L_{x_1}, L_{x_2}, \dots, L_{x_N}\}$ und $r := \min\{r_{x_1}/2, r_{x_2}/2, \dots, r_{x_N}/2\} > 0$. Die Menge K ist kompakt, also beschränkt. Sei R der Durchmesser von K , d.h. für alle $x, y \in K$ gilt $|x - y| \leq R$.

Dann ist f auf K gleichmäßig Lipschitz stetig mit Lipschitz-Konstante L , Unterscheide zwei Fälle:

1. $|x - y| \leq r$
Dann sind $x, y \in U_{x_i}$ für ein $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ und es gilt $|f(x) - f(y)| \leq L_{x_i}|x - y| \leq L|x - y|$.
2. $|x - y| \geq r$
Dann ist $|f(x) - f(y)| \leq R \leq Lr \leq L|x - y|$.

□

Eine einfache, aber wichtige Beobachtung ist, dass wir eine Differentialgleichung auch in eine Integralgleichung "übersetzen" können:

Lemma: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $t_0 \in I$. Dann ist $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \right\}$$

wenn $x \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds$$

löst.

Beweis:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung !

□

Satz 3.2 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf dem Zylinder $Z := \{|t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq r\}$ stetig und bezüglich x sogar gleichmäßig Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L . Sei $M := \sup_Z |f(t, x)|$ und $\delta < \min(a, r/M, \frac{1}{L})$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $x(t)$ für $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Beweis: Idee: Banachschen Fixpunktsatz anwenden auf

$$\mathcal{B} = C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B_r(x_0)}).$$

Für $x \in \mathcal{B}$ definieren wir die *Picard-Iterierte* von x als

$$(Px)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds.$$

Wir zeigen:

1. P bildet \mathcal{B} in sich ab, denn

$$\begin{aligned} |(Px)(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| \, ds \\ &\leq \delta M \leq r \\ \Rightarrow (Px)(t) &\in B_r(x_0) \text{ für alle } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \end{aligned}$$

2. P ist eine Kontraktion, denn für $x_1, x_2 \in \mathcal{B}$ gilt:

$$\begin{aligned} \|Px_1 - Px_2\|_{C^0} &= \sup_{|t-t_0| \leq \delta} |(Px_1)(t) - (Px_2)(t)| \\ &\leq \sup_{|t-t_0| \leq \delta} \int_{t_0}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))| \, ds \\ &\leq L \sup_{|t-t_0| \leq \delta} \int_{t_0}^t |x_1(s) - x_2(s)| \, ds \\ &\leq L\delta \|x_1 - x_2\|_{C^0} \end{aligned}$$

Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt nun die Existenz eines eindeutigen Fixpunkts.

Dieser Fixpunkt ist nach dem vorhergehenden Lemma eine Lösung des Anfangswertproblems. □

Für jede lokal Lipschitz-stetige Funktion und jedes Paar (t_0, x_0) kann man ein Rechteck R finden, in dem f gleichmäßig Lipschitz-stetig ist. Daher genügt lokale Lipschitz-Stetigkeit von f , um lokal eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems zu garantieren.

Insbesondere wissen wir nun auch, dass für jede stetig differenzierbare Funktion f die Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$ lokal immer eine eindeutige Lösung besitzt. Da man die Lösung des Anfangswertproblems durch die Funktionenfolge $x_0(t) \equiv x_0, x_1 = Px_0, x_2 = Px_1, \dots$ approximiert, nennt man das im Beweis von Satz 3.2 angewandte Verfahren auch die **Methode der sukzessiven Approximation**.

Beispiel: Nichteindeutigkeit

Um überhaupt die Chance auf nichteindeutige Lösungen zu haben, müssen wir eine Differentialgleichung betrachten, deren rechte Seite nicht lokal Lipschitz-stetig ist. Ein Standard-Kandidat dafür ist

$$\dot{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad x(0) = 0$$

denn \sqrt{x} ist bei $x = 0$ nicht lokal Lipschitz-stetig. Man sieht sofort, dass $x(t) \equiv 0$ eine Lösung ist. Allerdings ist auch

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{1}{4}(t - t_1)^2 & \text{für } t \geq t_1 \end{cases}$$

für beliebiges $t_1 > 0$ eine Lösung, wie man leicht nachrechnet. Das Anfangswertproblem hat in diesem Fall also unendlich viele verschiedene Lösungen.

Wenn f gleichmäßig beschränkt ist und die Lipschitz-Konstante von f nicht von t und x abhängt, dann kann man die Lösung durch "Aneinanderkleben" sogar auf beliebig große Intervalle $[-T, T]$ ausdehnen:

Satz 3.3 (Globale Existenz) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich x sogar global Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten L . Sei f außerdem beschränkt, d.h. $|f(t, x)| \leq M$ für alle t, x . Dann hat das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

eine eindeutige globale Lösung $x(t)$ für $t \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir können mit Satz 3.2 sukzessive Lösungen auf Intervallen $[-\delta, \delta]$, $[0, 2\delta]$, $[\delta, 3\delta]$, ... konstruieren. Wegen der lokalen Eindeutigkeit der Lösung ist dies immer eindeutig möglich und liefert eine eindeutige Lösung für $t \geq 0$. Ganz genauso konstruiert man eine eindeutige Lösung für alle $t \leq 0$. \square

Bemerkung: Für autonome Differentialgleichungen auf kompakten Mannigfaltigkeiten (z.B. auf der Sphäre S^2 oder dem Torus T^2) kann man mit diesen Argumenten die globale Existenz von Lösungen allein aus der Lipschitz-Stetigkeit von f beweisen.

Man kann auch einen reinen Existenzsatz (ohne Eindeutigkeit) für Differentialgleichungen zeigen. Da wir diesen Satz später nie benutzen werden, skizzieren wir den Beweis nur relativ knapp.

Satz 3.4 (Existenzsatz von Peano)

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf dem Zylinder $Z := \{|t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq r\}$ stetig. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

mindestens eine Lösung auf einem Intervall $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ besitzt.

Beweis: Wir zeigen nur, wie man für $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ eine Lösung findet. Ganz analog geht es für $t \in [t_0 - \delta, t_0]$. Sei wieder $M := \sup_Z |f(t, x)|$. Durch Verkleinern von Z kann man erreichen, dass $Ma \leq r$ ist. Wir wählen eine Funktion $x_0 \in C^1([t_0 - \eta_0, t_0], \overline{B_r(x_0)})$, die ziemlich beliebig ist, und nur die folgenden drei Bedingungen erfüllen soll:

1. $x_0(t_0) = x_0$,
2. $\frac{d}{dt}x_0(t_0) = f(t_0, x_0)$,
3. $|\frac{d}{dt}x_0(t)| \leq M$ für alle $t \in [t_0 - \eta_0, t_0]$.

Für kleine $0 < \eta \leq \eta_0$ definieren wir dann

$$x_\eta(t) := \begin{cases} x_0(t) & \text{für } t_0 - \eta_0 \leq t \leq t_0, \\ x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_\eta(s - \eta)) \, ds & \text{für } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta \end{cases}$$

Per Konstruktion ist dann $x_\eta \in C^1$ und

$$|x_\eta(t) - x_0| \leq Mt \leq Ma \leq b.$$

Die Funktionenfamilie der x_η ist also beschränkt. Sie ist auch gleichgradig stetig, denn

$$|x_\eta(t_1) - x_\eta(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x_\eta(s - \eta)) \, ds \right| \leq M|t_1 - t_2|$$

unabhängig von η .

Als nächstes betrachtet man eine Folge $\eta_n \searrow 0$ sowie die zugehörigen „Näherungslösungen“ x_{η_n} . Nach dem Satz von Arzela-Ascoli kann man aus dieser Folge eine gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen.

:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\eta_n}(t) \rightarrow x(t)$$

Wegen der gleichgradigen Stetigkeit der x_η gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\eta_n}(t - \eta_n) \rightarrow x(t).$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf der kompakten Menge Z , konvergiert $f(t, x_{\eta_n}(t - \eta_n))$ gleichmäßig gegen $f(t, x(t))$ (die zugehörige Rechnung bleibt jedem als Übungsaufgabe freigestellt...) und man erhält somit für $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$ durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$

$$\begin{array}{rcl} x_{\eta_n}(t) & = & x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{\eta_n}(s - \eta_n)) \, ds \\ \downarrow & & \downarrow \\ x(t) & = & x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds. \end{array}$$

Daher ist $x(t)$ tatsächlich eine Lösung auf $[t_0, t_0 + \delta]$. □

Man kann (analog zum Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf) auch den Satz von Peano aus einem Fixpunktsatz herleiten, nämlich aus dem

Satz 3.5 (Fixpunktsatz von Schauder) *Falls \mathcal{A} eine konvexe, kompakte Teilmenge eines Banchrums X ist, dann besitzt jede stetige Abbildung $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ einen Fixpunkt.*

Beweis: Siehe zum Beispiel Zeidler : Nonlinear Functional Analysis and Applications I, 2.6. □

Allerdings braucht man auch bei diesem Beweisgang den Satz von Arzela-Ascoli, um die Kompaktheit einer geeigneten Teilmenge im Funktionenraum nachzuweisen.

3.2 Fortsetzung von Lösungen

3.2.1 Maximales Existenzintervall

Nachdem wir gesehen haben, dass wir zumindest für kleine Zeiten t immer eine Lösung $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x(t))$$

mit Anfangswert $x(0) = x_0$ finden können, stellt sich die Frage, wie weit man diese Lösung fortsetzen kann. Dabei heißt $\hat{x} : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine **Fortsetzung** der Lösung x , falls $I \subset \hat{I}$ und $x(t) = \hat{x}(t)$ für alle $t \in I$. Das Beispiel $\dot{x} = x^2$ („Explosion“) zeigt schon, dass wir im allgemeinen keine globale Existenz, also eine Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$ erwarten können. Wir können aber immerhin zeigen, dass dieses Verhalten typisch ist, falls die Lösung nicht für alle Zeiten existiert:

Satz 3.6 *Sei f stetig und lokal Lipschitz-stetig in x . Weiter sei \mathcal{J} das maximale Intervall, auf dem eine Lösung von $\dot{x} = f(t, x(t))$ mit gegebenem $x(t_0) = x_0$ existiert. Dann gilt:*

(i) *Die Lösung ist auf ganz \mathcal{J} eindeutig,*

(ii) *$\mathcal{J} = (t_-, t_+)$ ist offen,*

(iii) *falls $t_+ < \infty$, dann gilt $\lim_{t \nearrow t_+} |x(t)| = \infty$.*

Genauso: falls $t_- > -\infty$, folgt $\lim_{t \searrow t_-} |x(t)| = \infty$.

Beweis:

(i) Wir setzen zunächst

$$\begin{aligned}\tilde{t}_+ &:= \sup\{t; \text{ es existiert eine Lösung auf } [t_0, t]\} \quad \text{und} \\ t_+ &:= \sup\{t; \text{ es existiert genau eine Lösung auf } [t_0, t]\}.\end{aligned}$$

Nach Satz 3.2 ist $\tilde{t}_+ \geq t_+ \geq t_0 + \delta$. Wir argumentieren indirekt und nehmen daher an, dass $\tilde{t}_+ > t_+$. Wegen der Stetigkeit der Lösungen ist für jede beliebige Lösung $x(t)$

$$\lim_{t \rightarrow t_+ + 0} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_+ - 0} x(t) = x_*$$

gleich. Löse nun das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_+) = x_*$$

mit Satz 3.2 lokal nahe $t = t_+$. Dies liefert eine eindeutige Lösung auf einem Intervall $[t_+ - \delta, t_+ + \delta]$ im Widerspruch zur Konstruktion von t_+ . Daher muss $t_+ = \tilde{t}_+$ sein. genauso zeigt man, dass die Lösung für $t < t_0$ eindeutig ist.

(ii) Sei $t \in \mathcal{J}$, dann existiert nach Satz 3.2 ein $\delta > 0$, so dass $[t - \delta, t + \delta] \subseteq \mathcal{J}$, also ist \mathcal{J} offen. Insbesondere kann natürlich $\mathcal{J} = \mathbb{R}$ sein.(iii) Wir zeigen indirekt, dass $|x(t)| \rightarrow \infty$ gilt, falls $t_+ < \infty$. Wäre dies nicht der Fall, so könnte man eine Folge $t_n \rightarrow t_+$ finden, für die $|x(t_n)|$ beschränkt ist.Dann existiert eine Teilfolge $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, für die $x(t_{n_k})$ sogar konvergiert:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_{n_k}) = x_\infty.$$

Um die Notation zu vereinfachen, nennen wir diese Teilfolge wieder $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

1) Es ist sogar

$$\lim_{t \nearrow t_+} x(t) = x_\infty,$$

d.h. x ist stetig fortsetzbar bis $t = t_+$. Dann können wir aber die Lösung durch Anwenden von Satz 3.2 mit Anfangswert $x(t_+) = x_\infty$ auf ein Intervall $[t_+ - \delta, t_+ + \delta]$ fortsetzen. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von t_+ .2) Es existiert eine Zahl $\gamma > 0$ und eine Folge (t'_k) mit $t'_k \rightarrow t_+$ und den beiden Eigenschaften

(a) $|x(t'_k) - x_\infty| = \gamma,$

(b) $|x(t) - x_\infty| \leq \gamma$ für alle $t \in [t_k, t'_k]$.

Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x(t_k) - x(t'_k)| = \gamma. \quad (5)$$

Da f stetig ist, gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass $|f(s, x)| \leq M$ für alle $t \in [t_0, t_+]$ und alle $x \in B_\gamma(x_\infty)$. Damit gilt

$$\begin{aligned}|x(t'_k) - x(t_k)| &= \left| \int_{t_k}^{t'_k} f(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_k}^{t'_k} |f(s, x(s))| ds \\ &\leq M |t_k - t'_k| \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich ein Widerspruch zu (5). □

Eine andere Formulierung von Teil (iii) ist die Folgende:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $x_0 \in D$. Falls die Lösung des Anfangswertproblems nur bis zu einer maximalen Zeit $t_+ < +\infty$ existiert, dann ist $x(t_+) \in \partial D$.

Als nächstes beweisen wir eine Ungleichung, die uns anschließend erlaubt, aus Wachstumseigenschaften von f auf die globale Existenz von Lösungen zu schließen.

Satz 3.7 (Gronwall-Lemma, Amann S.99) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$ und $\alpha, \beta, u \in C^0(I, \mathbb{R}_+)$ seien stetige, nichtnegative Funktionen. Weiter gelte die Ungleichung

$$u(t) \leq \alpha(t) + \left| \int_{t_0}^t \beta(s)u(s) \, ds \right| \quad \forall t \in I. \tag{6}$$

Dann ist

$$u(t) \leq \alpha(t) + \left| \int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s)e^{\left| \int_s^t \beta(\sigma) \, d\sigma \right|} \, ds \right| \quad \forall t \in I. \tag{7}$$

Beweis: Ohne Einschränkung sei $t \geq t_0 = 0$. Dann können wir die Betragsstriche weglassen. Wir setzen weiter

$$v(t) = \int_0^t \beta(s)u(s) \, ds.$$

Dann ist

$$\dot{v}(t) = \beta(t)u(t) \leq \alpha(t)\beta(t) + \beta(t)v(t).$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit

$$\gamma(t) := \exp\left(-\int_0^t \beta(s) \, ds\right)$$

so erhalten wir wegen $\dot{\gamma}(t) = -\beta(t)\gamma(t)$ die Ungleichung

$$\gamma \dot{v} \leq \alpha\beta\gamma - \dot{\gamma}v$$

also $\frac{d}{dt}(\gamma v) \leq \alpha\beta\gamma$ und mittels Integration

$$\underbrace{\exp\left(-\int_0^t \beta(s) \, ds\right)}_{=\gamma(t)} v(t) - \underbrace{\gamma(0)}_{=0} v(0) \leq \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\gamma(s) \, ds$$

Schließlich ist wegen (6)

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \alpha(t) + v(t) \\ &\leq \int_0^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(\sigma) \, d\sigma} \, ds \end{aligned}$$

wie behauptet. □

Direkt aus dem Gronwall-Lemma kann man folgern, dass unter geeigneten Wachstumsbedingungen an f , die Lösung für alle Zeiten existiert.

Korollar 3.8 Sei f stetig, lokal Lipschitz in x und es gebe stetige Funktionen $a(t), b(t)$, so dass

$$|f(t, x)| \leq a(t) + b(t) \cdot |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}.$$

Dann existiert die Lösung von

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h. das maximale Existenzintervall ist $J_{max} = \mathbb{R}$ (**globale Existenz**).

Beweis: Ohne Einschränkung können wir $a(t) \geq 0$ und $b(t) \geq 0$ voraussetzen. Wir argumentieren indirekt und nehmen an, dass $t_+ < \infty$. Wegen

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) \, ds \quad \text{für } 0 \leq t < t_+$$

gilt dann für $u(t) := |x(t)|$:

$$\begin{aligned} u(t) &\leq |x_0| + \int_0^t |f(s, x(s))| \, ds \\ &\leq |x_0| + \int_0^t (a(s) + b(s)u(s)) \, ds \\ &\leq |x_0| + \int_0^t a(s) \, ds + \int_0^t b(s)u(s) \, ds \end{aligned}$$

Mit dem Gronwall-Lemma folgt nun, dass $u(t) = |x(t)| \leq C$ für eine Konstante C und alle $0 \leq t < t_+$. Dies ist aber ein Widerspruch zu Satz 3.6(iii). Daher muss $t_+ = +\infty$ sein. Dass $t_- = -\infty$ ist, zeigt man natürlich ganz genauso. \square

Bemerkung: Ganz wichtig! Hier haben wir unter anderem bewiesen, dass alle linearen Differentialgleichungen

$$\dot{x} = A(t)x + c(t)$$

Lösungen auf ganz \mathbb{R} besitzen, wenn die Matrizen $A(t)$ und die Vektoren $c(t)$ stetig von t abhängen. Wähle dazu in Korollar 3.8 einfach $a(t) := \|c(t)\|$ und $b(t) := \|A(t)\|$.

Ein weiteres Korollar betrifft das Auseinanderdriften von Lösungen mit unterschiedlichem Anfangswert.

Korollar 3.9 Sei wieder $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig in t und Lipschitz-stetig in x mit Lipschitz-Konstante L . Dann gilt für die Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ von $\dot{x} = f(t, x)$ mit den Anfangswerten $x_1(t_0) = x_1^0$ und $x_2(t_0) = x_2^0$ die Abschätzung

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq e^{L|t-t_0|} |x_1^0 - x_2^0|.$$

Beweis: Es ist für $i = 1, 2$

$$x_i(t) = x_i^0 + \int_{t_0}^t f(s, x_i(s)) \, ds$$

also

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_2(t)| &\leq |x_1^0 - x_2^0| + \int_{t_0}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))| \, ds \\ &\leq |x_1^0 - x_2^0| + L \int_{t_0}^t |x_1(s) - x_2(s)| \, ds. \end{aligned}$$

Die Aussage des Korollars folgt nun direkt aus dem Gronwall-Lemma mit $u(t) := |x_1(t) - x_2(t)|$, $\alpha := |x_1^0 - x_2^0|$ und $\beta := L$. \square

3.3 Stetige Abhängigkeit

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass die Lösung eines Anfangswertproblems stetig von den Anfangsdaten und von Parametern abhängt.

Anschaulich heißt das: Wählt man eine Zeit t nahe an t_0 , für die Satz 3.2 eine eindeutige Lösung garantiert und variiert man die Anfangsbedingungen ein bisschen, dann ändert sich auch die entsprechende Lösung zur Zeit t nur wenig.

Satz 3.10 (Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig auf dem Zylinder $Z := \{|t - \tau_0| \leq a, |x - \xi_0| \leq r\}$ und es gebe Konstanten $M, L > 0$, so dass

$$\begin{aligned} |f(t, x)| &\leq M \text{ für alle } (t, x) \in Z \\ |f(t, x_1) - f(t, x_2)| &\leq L|x_1 - x_2| \text{ für alle } (t, x_1), (t, x_2) \in Z. \end{aligned}$$

Dann existiert ein $\delta > 0$ und eine Umgebung V von (ξ_0, τ_0) , so dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

für $(x_0, t_0) \in V$ eine eindeutige Lösung auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ besitzt, die stetig von x_0 und t_0 abhängt.

Beweis: In Satz 3.2 hatten wir $\delta < \min(a, r/M, \frac{1}{L})$ explizit konstruiert. Unsere Voraussetzungen erlauben es daher, δ unabhängig von t_0 und x_0 zu wählen, solange diese nur nahe genug bei (ξ_0, τ_0) liegen. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$x(t; t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s; t_0, x_0)) ds$$

Mit der Abkürzung $\bar{x}(t) = x(t; \bar{t}_0, \bar{x}_0)$ schätzt man nun ab:

$$\begin{aligned} |x(t) - \bar{x}(t)| &= |x(t; t_0, x_0) - x(t; \bar{t}_0, \bar{x}_0)| \\ &\leq \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds - \bar{x}_0 + \int_{\bar{t}_0}^t f(s, \bar{x}(s)) ds \right| \\ &\leq |x_0 - \bar{x}_0| + \int_{\bar{t}_0}^{t_0} |f(s, \bar{x}(s))| ds + \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, \bar{x}(s))| ds \\ &\leq |x_0 - \bar{x}_0| + M|\bar{t}_0 - t_0| + \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, \bar{x}(s))| ds \\ &\leq |x_0 - \bar{x}_0| + M|\bar{t}_0 - t_0| + \int_{t_0}^t L|x(s) - \bar{x}(s)| ds \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$u(t) := |x(t; t_0, x_0) - x(t; \bar{t}_0, \bar{x}_0)|$$

dann gilt für $|t - t_0| < \delta$

$$u(t) \leq |x_0 - \bar{x}_0| + M|\bar{t}_0 - t_0| + L \int_{t_0}^t u(s) ds$$

Dann erhält man mit Hilfe der Gronwallschen Ungleichung

$$u(t) \leq (|x_0 - \bar{x}_0| + M|\bar{t}_0 - t_0|) (1 + \delta L e^{\delta L}).$$

Dieser Ausdruck strebt für $|x_0 - \bar{x}_0| + |\bar{t}_0 - t_0| \rightarrow 0$ gegen 0 gleichmäßig für $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. □

Man kann diesen Satz auch analog zum Beweis von Satz 3.2 mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes beweisen. Allerdings muss man praktisch dieselbe Rechnung wie im Beweis von Satz 3.10 durchführen, um die Stetigkeit der Picard-Iteration P in x_0 und t_0 nachzuweisen.

3.3.1 Stetige Abhängigkeit von Parametern

Wenn die rechte Seite der Differentialgleichung stetig von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}^p$ abhängt, dann hängt auch die Lösung auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ stetig von λ ab. Das muss man nicht mehr neu zeigen, wenn man den folgenden kleinen Trick benutzt:

Erweitert man die Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ zu einem System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, \lambda) \\ \dot{\lambda} &= 0, \end{aligned}$$

und betrachtet λ als “dynamische” Variable, so besteht wegen $\lambda(t) \equiv \lambda(t_0)$ die Abhängigkeit von λ also nur noch in der Wahl des Anfangswertes $\lambda(0)$. Stetige Abhängigkeit der Lösung vom Parameter folgt dann aus der stetigen Abhängigkeit der Lösung von Anfangswerten.

3.4 Differenzierbare Abhängigkeit

Der Satz über die stetige Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen stellt hauptsächlich eine qualitative Aussage dar: “wenn die Anfangsbedingungen nahe genug beieinander gewählt werden, dann unterscheiden sich auch die Lösungen zu einer festen Zeit t nur wenig”.

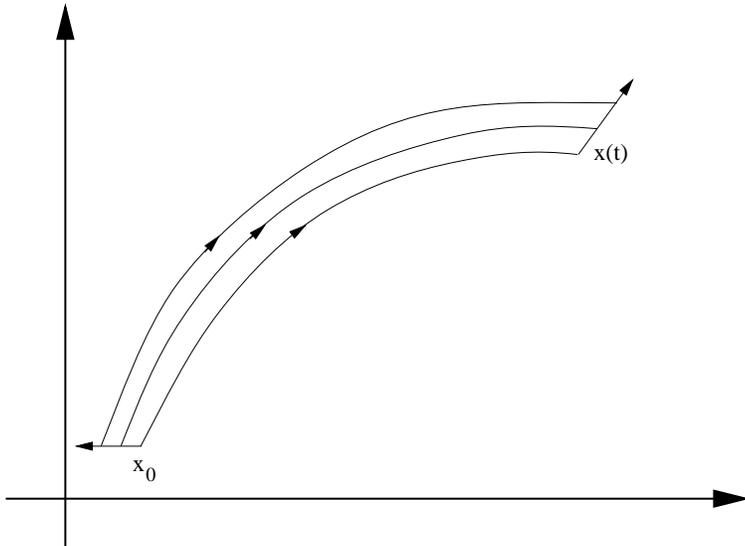


Abbildung 2: Differenzierbare Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert

Analoge quantitative Aussagen erhält man, indem man nach den Anfangsbedingungen bzw. nach Parametern *differenziert*: Wir werden darum zeigen, dass die Lösung $x(t; x_0, t_0, \lambda)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{x} & = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0; x_0, t_0, \lambda) & = x_0 \end{cases}$$

C^k -glatt von x_0 , t_0 und λ abhängt, wenn $f \in C^k$.

Dabei beschränken wir uns auf den wichtigsten Fall $k = 1$, höhere Differenzierbarkeit zeigt man aber mit denselben Argumenten.

Man kann diese Differenzierbarkeit auf zwei Arten verstehen:

1. Wie ändert sich für festes $t > 0$ die Lösung $x(t; x_0, t_0, \lambda)$ als Punkt im \mathbb{R}^n , wenn man x_0 (oder t_0 oder λ) in eine bestimmte Richtung variiert?
2. Wie ändert sich die Lösung $x(\cdot; x_0, t_0, \lambda)$ als Element des Banachraums $C^0([0, t], \mathbb{R}^n)$, wenn man x_0 (oder t_0 oder λ) in eine bestimmte Richtung variiert?

Beide Fragen hängen natürlich eng miteinander zusammen.

Kurzer Einschub: Was bedeutet Differenzierbarkeit in einem Banachraum?

Seien X, Y Banachräume. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}(X, Y)$ den Raum der beschränkten, linearen Abbildungen von X nach Y . Dann heißt eine Funktion $F : X \rightarrow Y$ **differenzierbar** im Punkt $x_0 \in X$, falls eine Abbildung $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ existiert, so dass

$$F(x + h) = F(x_0) + Ah + o(|h|)$$

Die lineare Abbildung A heisst dann natürlich **Ableitung** von F im Punkt x_0 .

Als erstes untersuchen wir die Ableitung nach dem Anfangswert. Wir werden später sehen, dass es ausreicht, wenn wir nach dem Anfangswert x_0 differenzieren können.

Anschaulich sagt uns diese Ableitung etwa: Wie stark und in welche Richtung ändert sich die Lösung des Anfangswertproblems zur Zeit t , wenn ich den Anfangswert ein kleines Stück in Richtung $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t_0)$ verschiebe, siehe Abbildung 2. Zunächst leiten wir rein formal eine Differentialgleichung für die Ableitung $\frac{\partial x(t; x_0, t_0, \lambda)}{\partial x_0}$ her:

Wenn wir ohne Rücksicht auf Vertauschbarkeit von Ableitungen die beiden Gleichungen des Anfangswertproblems nach x_0 differenzieren, erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right) = D_x f(t, x(t), \lambda) \frac{\partial x}{\partial x_0}$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t_0; x_0, t_0, \lambda) = Id$$

Man erhält also eine nicht-autonome lineare Differentialgleichung für $\frac{\partial x}{\partial x_0}$. Daher heißt die Gleichung

$$\dot{v} = D_x f(t, x(t), \lambda)v$$

auch **Linearisierung entlang der Lösung $x(t)$ oder Variationsgleichung**.

Der folgende Satz rechtfertigt die formale Rechnung:

Satz 3.11 (Differenzierbare Abhängigkeit vom Anfangswert) (Amann, S.129 ff.) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und bezeichne $x(\cdot; x_0, t_0)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

für $t \in [t_-, t_+]$. Dann existiert die partielle Ableitung

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} \in C^1([t_-, t_+], \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$$

von x nach dem Anfangswert x_0 und erfüllt die Matrix-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right) = D_x f(t, x(t)) \frac{\partial x}{\partial x_0}$$

mit Anfangswert

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t_0; x_0, t_0) = Id.$$

Beweis: Sei $h \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor mit $|h|$ klein und

$$x_h(t; t_0, x_0) := x(t; t_0, x_0 + h) - x(t; t_0, x_0).$$

Wir wollen also $\frac{x_h(t)}{h}$ im Limes $|h| \rightarrow 0$ beschreiben. Dann ist

$$\begin{aligned} \dot{x}_h(t) &= \dot{x}(t; t_0, x_0 + h) - \dot{x}(t; t_0, x_0) \\ &= f(t, x(t; t_0, x_0 + h)) - f(t, x(t; t_0, x_0)) \\ &= \int_0^1 D_x f(t, x(t; t_0, x_0) + \theta x_h(t; t_0, x_0)) d\theta x_h(t) \\ &=: V_h(t; t_0, x_0, h)x_h(t) \end{aligned}$$

und $x_h(t_0; t_0, x_0) = h$. Nach Korollar 3.8 und der darauffolgenden Bemerkung hat die Matrix-Differentialgleichung

$$\dot{Y}_h = V_h(t; t_0, x_0)Y_h, \quad Y_h(t_0) = Id$$

eine eindeutige Lösung, die stetig vom Parameter h abhängt. Wegen der Eindeutigkeit muss dann

$$x_h(t; t_0, x_0) = Y_h(t; t_0, x_0)h$$

sein. Nun zeigen wir, dass $Y_0(t; t_0, x_0)$ die Ableitung der Lösung nach dem Anfangswert ist:

$$\begin{aligned} \|x(t; t_0, x_0 + h) - x(t; t_0, x_0) - Y_0(t; t_0, x_0)h\| &\leq \|x_h(t; t_0, x_0) - Y_0(t; t_0, x_0)h\| \\ &= \|Y_h(t; t_0, x_0)h - Y_0(t; t_0, x_0)h\| \\ &\leq \|Y_h(t; t_0, x_0) - Y_0(t; t_0, x_0)\| \cdot |h| \\ &= o(|h|). \end{aligned}$$

Die Normen kann man auf zwei verschiedene Arten lesen: Entweder für festes $t \in [t_-, t_+]$ als Norm im \mathbb{R}^n oder als Norm im Banachraum $C^0([t_-, t_+], \mathbb{R}^n)$.

Für $h = 0$ ist $x_h(t; t_0, x_0) \equiv 0$, also ist Y_0 die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{Y}_0 = D_x f(t, x(t; t_0, x_0))Y_0, \quad Y_0(t_0) = Id.$$

□

Beispiel: Falls $x = 0$ Ruhelage einer autonomen Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ ist, so ist die **Linearisierung**

$$\dot{v}(t) = Df(0)v(t)$$

im Gleichgewicht eine autonome, lineare Differentialgleichung.

Analog ist die Linearisierung entlang eines p -periodischen Orbits $\gamma(t)$ eine lineare Differentialgleichung

$$\dot{v}(t) = Df(\gamma(t))v(t) = A(t)v(t)$$

mit einer p -periodischen Matrixfunktion A .

Über lineare Gleichungen dieser speziellen Form werden wir in Kapitel 5 und 6 noch einiges lernen. Insbesondere wissen wir aber schon aus Korollar 3.8, dass immer globale Lösungen zu diesen Gleichungen existieren.

Behauptung: Es genügt, dass wir nach dem Anfangswert differenzieren können, dann können wir auch nach Parametern, bzw. nach der Anfangszeit differenzieren.

1) Um nach Parametern $\lambda \in \mathbb{R}^p$ zu differenzieren, erweitern wir (wie schon im vorigen Abschnitt) die Gleichung zu

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x, \lambda) \\ \dot{\lambda} &= 0 \end{cases}$$

mit Anfangswerten

$$x(t_0; x_0, t_0, \lambda_0) = x_0 \text{ und } \lambda(t_0; x_0, t_0, \lambda_0) = \lambda_0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt sofort, dass λ konstant bleibt, die Abhängigkeit von λ ist also nur noch im Anfangswert λ_0 enthalten. Die Ableitungen nach λ sind also gerade die Ableitungen nach den letzten p Komponenten des Anfangswerts. Setzt man

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(t, \tilde{x}) = \begin{pmatrix} f(t, \tilde{x}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

so ist

$$D_{\tilde{x}}\tilde{f} = \begin{pmatrix} D_x f & D_\lambda f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und nach dem vorigen Satz lautet die Variationsgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial \lambda_0} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} & \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x f(t, x(t), \lambda) & D_\lambda f(t, x(t), \lambda) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial \lambda_0} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} & \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_0} \end{pmatrix}$$

mit Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial \lambda_0} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} & \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_0} \end{pmatrix}(t_0) = \begin{pmatrix} Id_n & 0 \\ 0 & Id_p \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir für die Ableitung $v := \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\partial x}{\partial \lambda_0}$ die Gleichung

$$\dot{v} = D_x f(t, x(t), \lambda)v + D_\lambda f(t, x(t), \lambda), \quad v(0) = 0.$$

2) Um nach der Anfangszeit t_0 differenzieren zu können, setzt man

$$\tilde{x}(t - t_0; x_0, 0) := x(t; x_0, t_0), \text{ bzw. } \tilde{x}(t; x_0, 0) := x(t + t_0; x_0, t_0).$$

Dann löst diese Funktion das Anfangswertproblem

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f(t + t_0, \tilde{x}(t)), \quad \tilde{x}(0) = x_0$$

mit der festen Anfangszeit $t = 0$. Die Abhängigkeit von t_0 wird sozusagen vom Anfangswert in die Differentialgleichung verschoben und t_0 kann als Parameter der \tilde{x} -Gleichung betrachtet werden. Nach der

vorhergehenden Rechnung zur Differenzierbarkeit der Lösung bezüglich Parametern löst $w := \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t_0}$ das Anfangswertproblem

$$\dot{w}(t) = D_x f(t + t_0, \tilde{x}(t))w(t) + D_t f(t + t_0, \tilde{x}(t)), \quad w(0) = 0.$$

Setzt man $v := \frac{\partial x}{\partial t_0}$ so ergibt sich aus der Relation zwischen \tilde{x} und x die Gleichung

$$\frac{\partial x}{\partial t_0}(t) = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t_0}(t - t_0) - \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t}(t - t_0) \iff v(t) = w(t - t_0) - f(t, x(t)),$$

woraus durch Differentiation

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= \dot{w}(t - t_0) - D_x f(t, x(t))\dot{x}(t) - D_t f(t, x(t)) \\ &= D_x f(t, x(t))w(t) + D_t f(t, x(t)) - D_x f(t, x(t))f(t, x(t)) - D_t f(t, x(t)) \\ &= D_x f(t, x(t))v(t) \end{aligned}$$

folgt. Für den Anfangswert gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t_0}(t_0, x_0, t_0) &= v(t_0) = w(0) - f(t_0, x(t_0)) \\ &= -f(t_0, x_0). \end{aligned}$$

Also löst $v = \frac{\partial x}{\partial t_0}$ das Anfangswertproblem

$$\dot{v} = D_x f(t, x(t))v, \quad v(t_0) = -f(t_0, x_0).$$

Bemerkung: Abhängigkeit vom Vektorfeld

Man kann auch die Abhängigkeit vom Vektorfeld, also von der rechten Seite der Differentialgleichung untersuchen. Die Frage ist dann: Wie beeinflusst es die Lösung $x(t)$, wenn man die rechte Seite $f(x)$ beispielsweise im Funktionenraum $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein klein wenig ändert (stetige Abhängigkeit), bzw. in eine Richtung in diesem Funktionenraum variiert (differenzierbare Abhängigkeit).

3.5 Fluss und Differentialgleichung

An dieser Stelle soll noch einmal zusammengefasst werden, was wir über den Zusammenhang zwischen Flüssen und Differentialgleichungen bisher gelernt haben. Schon in Kapitel 2 wurde gezeigt, dass man jedem Fluss eine autonome Differentialgleichung und jeder Evolution eine nicht-autonome Differentialgleichung zuordnen kann, so dass Fluss, bzw. Evolution das jeweilige Anfangswertproblem lösen. Wir geben nun hinreichende Bedingungen dafür an, dass auch die Umkehrung gilt:

Satz 3.12 (Von der Differentialgleichung zur Evolution) *Betrachte die nicht-autonome Differentialgleichung*

$$(*) \quad \dot{x} = f(t, x)$$

mit f stetig und $D_x f$ stetig und der Wachstumsbedingung

$$|f(t, x)| \leq a(t) + b(t)|x|,$$

siehe Korollar 3.8. Definiere $\Phi_{t, t_0}(x_0) := x(t)$, wobei $x(t)$ die Lösung von $(*)$ mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$ ist.

Dann ist Φ eine Evolution.

Für autonome Vektorfelder gilt natürlich eine entsprechende Aussage.

Korollar 3.13 (Von der Differentialgleichung zum Fluss) Betrachte die autonome Differentialgleichung

$$(**) \quad \dot{x} = f(x)$$

mit $f \in C^1$ und der Wachstumsbedingung

$$|f(x)| \leq a + b|x|.$$

Definiere $\Phi_t(x_0) := x(t)$, wobei $x(t)$ die Lösung von $(**)$ mit Anfangswert $x(0) = x_0$ ist. Dann ist Φ ein Fluss.

Beweis des Satzes: Wir müssen nachweisen, dass $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist und die Eigenschaften einer Evolution erfüllt. Dass Φ differenzierbar ist, folgt aus Satz 3.11, wegen

$$\Phi_{t,s}^{-1} = \Phi_{s,t}$$

ist $\Phi_{t,s}$ für alle s, t ein Diffeomorphismus.

Aus der Definition von $\Phi_{t,t_0}(x_0)$ folgt sofort, dass

$$\Phi_{t_0,t_0}(x_0) = x(t_0) = x_0$$

und

$$\Phi_{t_2,t_1} \circ \Phi_{t_1,t_0}(x_0) = \Phi_{t_2,t_0}(x_0)$$

folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems. □

3.6 Diskrete dynamische Systeme

Die meisten der in diesem Kapitel angesprochenen Fragen stellen sich für diskrete dynamische Systeme

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

gar nicht oder sind einfach zu beantworten.

- Falls ϕ auf ganz \mathbb{R}^n definiert ist, dann existieren die Iterierten x_n automatisch für alle $n \in \mathbb{Z}$.
- Da ϕ differenzierbar ist, hängen auch die Iterierten $\phi^n(x_0)$ für festes n differenzierbar vom Startwert x_0 ab. Die Ableitung nach dem Anfangswert erfüllt die **diskrete Variationsgleichung**

$$v_{n+1} = D\phi(x_n)v_n.$$

- Falls ϕ stetig (differenzierbar) von einem Parameter abhängt, dann ist auch ϕ^n stetig (differenzierbar).

4 Numerik von Differentialgleichungen

Dieses Kapitel über die numerische Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen kann natürlich nicht die entsprechende Vorlesung ersetzen. Ziel ist es vielmehr, die wichtigsten Vokabeln kennenzulernen und etwas besser zu verstehen, was Programme wie DSTOOL eigentlich machen. Gleichzeitig soll dieses Kapitel dazu genutzt werden, noch einige Beispiele kennenzulernen, die sich nicht so gutmütig verhalten, wie die in Kapitel 1 besprochenen Differentialgleichungen, und bei deren Verständnis die Hilfe von Computern ganz entscheidend ist.

Ganz allgemein stellen sich bei der numerischen Behandlung eines Problems (unter anderem) die folgenden Fragen:

- Mit welchem Verfahren kann man die Lösung (im Prinzip) beliebig genau berechnen ?
- Mit welchem Verfahren geht das besonders schnell und günstig ?

- Entspricht jede Lösung, die ein numerisches Verfahren liefert, auch tatsächlich einer echten Lösung ?
- Kann man im voraus (“a priori”) bestimmen, wie genau man rechnen muss, damit der (absolute oder relative) Fehler der Näherung unterhalb einer vorgegebenen Schranke bleibt ?
- Wie läßt sich nach der Rechnung (“a posteriori”) feststellen, wie gut die Näherungslösung ist ?
- Respektiert bzw. nutzt ein Verfahren die spezielle Symmetrie oder Struktur des gegebenen Problems ?

Wir können hier nur einen Teil dieser Aspekte anreißen und in groben Zügen erklären, wie die numerische Lösung von Differentialgleichungen in der Praxis aussieht.

4.1 Eulersches Polygonzugverfahren

Das einfachste Verfahren zur näherungsweise Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen $\dot{x} = f(t, x)$ beruht auf der Beobachtung, dass die rechte Seite $f(t, x)$ in der Nähe eines Punktes fast konstant ist. Man wählt daher eine Schrittweite h und setzt für $t_n := t_0 + nh$

$$x^h(t_n) := x^h(t_{n-1}) + hf(t_{n-1}, x^h(t_{n-1})) \quad (8)$$

mit dem Anfangswert $x^h(t_0) = x_0$. Man nennt diese Methode zur Bestimmung einer Näherungslösung **explizites Eulerverfahren**.

Bemerkung: Zunächst ist daher die Näherungslösung nur zu den (diskreten) Zeiten t_n definiert. Man kann aber z.B. durch lineare Interpolation eine Näherungslösung für beliebige t erhalten: Für $t \in (t_{n-1}, t_n]$ existiert $\theta \in (0, 1]$ so dass $t = t_{n-1} + \theta h$. Setze dann $x^h(t_0) = x_0$ und

$$x^h(t) := x^h(t_{n-1}) + \theta hf(t_{n-1}, x^h(t_{n-1})), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Das explizite Eulerverfahren ist eine sehr grobe Näherung und wird in der Praxis nur wenig verwendet. Seine einfache Struktur erlaubt uns aber, einen einfachen Konvergenzbeweis zu geben. Die Näherungslösung konvergiert also auf einem vorgegebenen Intervall $t \in [0, T]$ gegen die richtige Lösung, wenn man die Schrittweite immer kleiner wählt:

Satz 4.1 Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0.$$

Weiter sei $h_n := \frac{T}{n}$ und x^{h_n} die Näherungslösung nach dem expliziten Eulerverfahren (8). Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{h_n}(T) = x(T).$$

Dies ist nicht die “optimale” Formulierung, es genügt wie im Satz von Picard-Lindelöf die Stetigkeit bezüglich t bzw. Lipschitz-Stetigkeit bezüglich x in einer Umgebung der untersuchten “echten” Lösung $x(t)$. Zum Beweis von Satz 4.1 benötigen wir eine diskrete Variante der Gronwall-Ungleichung:

Lemma: [Diskrete Gronwall-Ungleichung]

Sei $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen, die die Ungleichung

$$\xi_{n+1} \leq \alpha + (1 + \beta)\xi_n$$

mit Konstanten $\alpha, \beta \geq 0$ erfüllt. Dann gilt

$$\xi_n \leq e^{n\beta} \xi_0 + \alpha \frac{e^{n\beta} - 1}{\beta}.$$

Beweis: Mit Vollständiger Induktion zeigt man

$$\xi_n \leq (1 + \beta)^n \xi_0 + \alpha \frac{(1 + \beta)^n - 1}{\beta} :$$

$n = 1$: klar

$n \rightarrow n + 1$:

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &\leq \alpha + (1 + \beta)\xi_n \\ &\leq \alpha + (1 + \beta) \left((1 + \beta)^n \xi_0 + \alpha \frac{(1 + \beta)^n - 1}{\beta} \right) \\ &\leq (1 + \beta)^{n+1} \xi_0 + \alpha \frac{(1 + \beta)^{n+1} - 1}{\beta} \end{aligned}$$

Nun ist aber für $\beta > -1$ immer $(1 + \beta)^n \leq e^{n\beta}$, daher folgt aus dieser Ungleichung unmittelbar die Aussage des Lemmas. \square

Beweis von Satz 4.1: Sei L die Lipschitz-Konstante von f und $|f(t, x)| \leq M$ in einem kompakten Gebiet, indem sich alles abspielt.

Es ist

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, x(s)) \, ds \\ &= x(t_k) + \int_0^{h_n} f(t_k + \theta, x(t_k + \theta)) \, d\theta. \end{aligned}$$

Mit einer langen, aber elementaren Rechnung erhalten wir dann

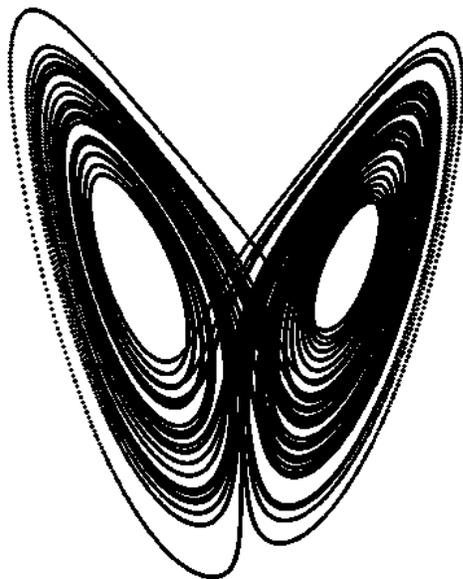
$$\begin{aligned} |x^h(t_{k+1}) - x(t_{k+1})| &= \left| x^h(t_k) + h_n f(t_k, x^h(t_k)) - x(t_k) - \int_0^{h_n} f(t_k + \theta, x(t_k + \theta)) \, d\theta \right| \\ &\leq |x^h(t_k) - x(t_k)| + \int_0^{h_n} |f(t_k + \theta, x(t_k + \theta)) - f(t_k, x^h(t_k))| \, d\theta \\ &\leq |x^h(t_k) - x(t_k)| + \int_0^{h_n} |f(t_k + \theta, x(t_k + \theta)) - f(t_k, x(t_k))| \, d\theta \\ &\quad + \int_0^{h_n} |f(t_k, x(t_k)) - f(t_k, x^h(t_k))| \, d\theta \\ &\leq |x^h(t_k) - x(t_k)| + h_n |f(t_k, x(t_k)) - f(t_k, x^h(t_k))| + \int_0^{h_n} L|\theta| + L|x(t_k + \theta) - x(t_k)| \, d\theta \\ &\leq |x^h(t_k) - x(t_k)| + Lh_n |x(t_k) - x^h(t_k)| + \int_0^{h_n} L|\theta| + LM|\theta| \, d\theta \\ &\leq |x^h(t_k) - x(t_k)| + Lh_n |x(t_k) - x^h(t_k)| + Ch_n^2, \end{aligned}$$

wobei $C > 0$ eine Konstante ist. Aus dem Hilfssatz erhält man dann mit $\xi_k := |x^h(t_k) - x(t_k)|$, $\alpha := Ch_n^2$ und $\beta := Lh_n$ die Abschätzung

$$|x^h(t_k) - x(t_k)| \leq Ch_n^2 \frac{e^{nLh_n} - 1}{Lh_n} = \frac{C(e^{LT} - 1)}{L} h_n \rightarrow 0.$$

\square

Bemerkung: Der Beweis sagt nichts darüber aus, wie klein man h nun in einem konkreten Fall wählen muss. Dazu und zu vielen weiteren Fragen, die in diesem Kapitel nur angerissen werden, sei noch einmal auf die Vorlesung “Numerik für Gewöhnliche Differentialgleichungen” oder die Spezialliteratur (Hairer/Wanner, Deuffhard/Bornemann,...) verwiesen.

Der Lorenz-Attraktor (projiziert in die y - z -Ebene)**Intermezzo 1: Die Lorenz-Gleichung**

Der Meteorologe Lorenz reduzierte 1963 ein Modell aus der Fluidodynamik auf die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta z + xy\end{aligned}$$

mit Parametern $\sigma, \rho, \beta > 0$. Schon Lorenz selbst untersuchte numerische Lösungen dieser Gleichungen. Für $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ und $\rho = 28$ beobachtete Lorenz, dass die Lösungskurven sich schnell einer zweiblättrigen Fläche annähern und dann auf diesem schmetterlingsartigen Objekt bleiben. Allerdings können die Lösungen “Exkursionen” auf zwei verschiedene Arten durchführen. Schon minimale Unterschiede in den Anfangsbedingungen können bewirken, dass zwei ursprünglich benachbarte Lösungen sich trennen und unterschiedliche Exkursionen machen. Von Hand kann man die folgenden Beobachtungen verifizieren:

Symmetrie: Die Lorenz-Gleichung ist symmetrisch bezüglich der Spiegelung an der z -Achse. Wenn man (x, y, z) durch $(-x, -y, z)$ ersetzt, ändern sich die Gleichungen nicht. Insbesondere ist dann mit jeder Lösung $(x(t), y(t), z(t))$ auch $(-x(t), -y(t), z(t))$ eine Lösung.

Wegen dieser Symmetrie ist die z -Achse *invariant*: Wählt man die Anfangsbedingung mit $x_0 = y_0 = 0$, so ist $x(t) = y(t) = 0$ für alle t .

Ruhelagen: Für $0 < \rho < 1$ ist $x = y = z = 0$ die einzige Ruhelage und alle Lösungen konvergieren gegen diese Ruhelage (wir werden das voraussichtlich in Kapitel 6 genau zeigen). Erhöht man ρ , dann *verzweigt* dieses Gleichgewicht in einer sogenannten *Pitchfork-Verzweigung* und zwei neue Ruhelagen

$$(\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$$

entstehen. Wegen der Symmetrie liegen diese neuen Gleichgewichte natürlich spiegelsymmetrisch bezüglich der z -Achse.

Beschränktheit der Lösungen: Sparrow zeigte, dass alle Lösungen, die im Ellipsoid

$$E := \{(x, y, z); \rho x^2 + y^2 + \beta(z - 2\rho)^2 \leq 4\beta\rho^2\}$$

starten, E nicht verlassen können. Auch alle Lösungen, die außerhalb starten, erreichen nach endlicher Zeit die Menge E .

Mehr zu Verzweigungen, Attraktoren, etc. dann in der Vorlesung *Dynamische Systeme II* im Sommersemester...

4.2 Einschrittverfahren

Definition: Ein numerisches Verfahren, das $x(t_n + h)$ aus $x(t_n)$ (und f) berechnet, heisst **Einschrittverfahren** der Schrittweite h . Im allgemeinen erfüllt $x(t_n + h)$ eine nichtlineare Gleichung der Form

$$\Psi(x(t_n), x(t_n + h), t, h, f) = 0.$$

Kann man diese Gleichung nach $x(t_n + h)$ auflösen, so handelt es sich um ein **explizites** Verfahren. Bei einem expliziten Einschrittverfahren berechnet man die Approximationen also nach der Regel

$$x(t_n + h) = x(t_n) + h\Phi(t_n, x(t_n), h).$$

Bei einem **Mehrschrittverfahren** werden die Werte $x(t_0), x(t_0 - h), x(t_0 - 2h), \dots, x(t_0 - nh)$ zur Berechnung von $x(t_0 + h)$ benutzt. Zu Beginn muss man natürlich ein Einschrittverfahren verwenden, bis man erst einmal genügend x -Werte zur Verfügung hat.

Das explizite Euler-Verfahren ist ein Einschritt-Verfahren mit $\Phi(t, x(t_n), h) = f(t_n, x(t_n))$.

Auch das **Runge–Kutta–Verfahren** (1895) ist ein Einschrittverfahren. Es wird häufig verwendet, da es relativ einfach, aber trotzdem recht genau ist. Hier berechnet sich x_{n+1} nach der Formel

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}k_1 + \frac{h}{3}k_2 + \frac{h}{3}k_3 + \frac{h}{6}k_4$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, x), \\ k_2 &= 2f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= 2f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t + h, x + hk_3). \end{aligned}$$

Experimente zeigen schnell, dass das Runge–Kutta–Verfahren die Lösung viel genauer approximiert als das Euler–Verfahren. Ein Nachteil des Runge–Kutta–Verfahrens ist allerdings, dass es viele f -Auswertungen benötigt. Diese sind "teuer", falls f kompliziert ist.

Bei der Einschätzung der Güte von Einschrittverfahren spielt die Genauigkeit der Approximation von f durch Φ eine große Rolle.

Um diese zu messen, setzt man zunächst

$$\Delta(t, x, h, f) := \begin{cases} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} & \text{für } h \neq 0 \\ f(t, x) & \text{für } h = 0, \end{cases}$$

wobei $x(\cdot)$ die Lösung mit Anfangswert $x(t) = x$ ist. Für Lipschitz-stetiges f ist die Lösung eindeutig und Δ ist stetig in h .

Definition: Der **lokaler Diskretisierungsfehler** ist die Differenz zwischen Δ und Φ :

$$\tau(t, x, h) := \Delta(t, x, h, f) - \Phi(t, x, h, f).$$

Definition: Ein Einschrittverfahren heisst **konsistent**, falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(t, x, h) = 0.$$

Die Konvergenzrate bekommt auch einen Namen:

Definition: Falls für alle $f \in C^p$ gilt, dass

$$\tau(t, x, h) = \mathcal{O}(|h|^p),$$

so heißt $p \in \mathbb{N}$ die **Ordnung des Verfahrens**.

Die Konsistenz eines Einschrittverfahrens lässt sich sehr einfach nachprüfen:

Lemma: Sei f stetig in t und Lipschitz-stetig in x . Das Einschrittverfahren $x^h(t_{n+1}) = x^h(t_n) + h\Phi(t_n, x^h(t_n), h, f)$ ist konsistent genau dann, wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(t, x, h, f) = f(t, x).$$

Beweis: Übungsaufgabe !

Durch Taylor-Entwicklung (lange, aber elementare Rechnung) lässt sich zeigen, dass das Runge-Kutta-Verfahren ein Verfahren 4. Ordnung ist, lokal wird also die rechte Seite f der Differentialgleichung bis auf Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(|h|^4)$ genau approximiert.

Das Runge-Kutta-Verfahren gehört zu einer ganzen Klasse von Einschritt-Verfahren, die alle zusammen ebenfalls Runge-Kutta-Verfahren heißen.

Ganz allgemein sind sie von der Form

$$x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), \quad \Phi(t_n, x_n, h) = \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

mit

$$k_i = f \left(t_n + c_i h, x_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right).$$

Dabei heißt s die Stufenzahl und die Koeffizienten werden oft in den sogenannten *Butcher-Tableaus* angegeben:

c_1	0	0	0
c_2	a_{21}	a_{22}	0
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\ddots	\vdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	$a_{s,s-1}$
	b_1	b_2	b_s

Für "das" Runge-Kutta-Verfahren sieht das Tableau dann folgendermaßen aus:

1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
1	0	0	1
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Ein Runge-Kutta-Verfahren 5. Ordnung von *Dormand* und *Prince* liegt dem in **MATLAB** eingebauten Differentialgleichungslöser `ode45` zugrunde.

Eigentlich interessiert man sich aber nicht so sehr für die lokale Approximationsgüte eines Verfahrens, sondern für den Wert der Näherungslösung zu einer festen Zeit t . Dieser Wert soll natürlich für $h \rightarrow 0$ gegen den Wert der "echten" Lösung konvergieren.

Definition: Der globale Diskretisierungsfehler ist die Differenz

$$e_n(t) := x(t) - x^{h_n}(t)$$

wobei $t = t_0 + nh_n$ fest bleibt. Ein Verfahren ist **konvergent**, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(t) = 0.$$

Satz 4.2 (Konsistenz \implies Konvergenz) Sei f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L und das explizite Einschrittverfahren Φ sei konsistent mit Ordnung p .

Dann gilt für den globalen Diskretisierungsfehler die Abschätzung

$$\|e_n(t)\| \leq C \frac{e^{L|t-t_0|} - 1}{L} |h|^p,$$

aus der Konsistenz folgt also die Konvergenz des Verfahrens.

Bemerkung: Der Satz gilt auch bei variablen Schrittweiten h_i mit $h := \max h_i$.

Beweis: Sei $x(t; t_0, x_0)$ wie in Kapitel 3 die exakte Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Wir benutzen nun eine geschickte Zerlegung für den globalen Diskretisierungsfehler mit Hilfe einer Teleskopsumme:

$$\begin{aligned} e_n(t_n) &= x(t_n) - x^h(t_n) = x(t_n; t_0, x^h(t_0)) - x(t_n; t_n, x^h(t_n)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (x(t_n; t_i, x^h(t_i)) - x(t_n; t_{i+1}, x^h(t_{i+1}))) \\ \Rightarrow \|x(t_n) - x^h(t_n)\| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|x(t_n; t_i, x^h(t_i)) - x(t_n; t_{i+1}, x^h(t_{i+1}))\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|x(t_{i+1}; t_i, x^h(t_i)) - x(t_{i+1}; t_{i+1}, x^h(t_{i+1}))\| e^{L|t_n - t_{i+1}|} \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung erhält man mit Hilfe des Gronwall-Lemmas (siehe Korollar 3.9). Die Terme der Summe sind wegen $x(t_{i+1}; t_{i+1}, x^h(t_{i+1})) = x^h(t_{i+1})$ lokale Diskretisierungsfehler nach einem einzelnen Schritt. Wegen der Konsistenz kann man also jeden der Terme in der Summe abschätzen durch

$$\begin{aligned} \|x(t_{i+1}; t_i, x^h(t_i)) - x(t_{i+1}; t_{i+1}, x^h(t_{i+1}))\| &\leq \|x(t_{i+1}; t_i, x^h(t_i)) - x^h(t_{i+1})\| \\ &\leq h \frac{\|x(t_{i+1}; t_i, x^h(t_i)) - x^h(t_i) + x^h(t_i) - x^h(t_{i+1})\|}{h} \\ &\leq h(\Delta(t_i, x^h(t_i), h, f) - \Phi(t_i, x^h(t_i), h, f)) \\ &= h\tau(t_i, x^h(t_i), h, f) \\ &= Ch^{p+1} \end{aligned}$$

wegen der Konsistenz des Verfahrens. Für den globalen Fehler folgt dann

$$\|x(t_n) - x^h(t_n)\| \leq Ch^{p+1} \sum_{i=0}^{n-1} e^{L|x_n - x_{i+1}|} \leq Ch^{p+1} \int_{t_0}^{t_n} e^{L|t_n - \xi|} d\xi$$

woraus man durch Integration die im Satz angegebene Abschätzung erhält. \square

Zu den Einschrittverfahren gehören auch Verfahren, bei denen man $u(t_0 + h)$ nur durch Lösen einer impliziten Gleichung berechnen kann.

Eine Variante des Euler-Verfahrens geht von der Gleichung

$$x^h(t_n) := x^h(t_{n-1}) + hf(t_n, x^h(t_n)) \quad (9)$$

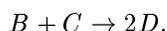
aus und heißt **implizites Euler-Verfahren** (manchmal auch “backward Euler”). Um diese (in aller Regel nichtlineare) *implizite* Gleichung näherungsweise nach $x^h(t_n)$ aufzulösen, ist deutlich mehr Aufwand nötig als bei einem expliziten Verfahren. Was ist also der Vorteil? Implizite Verfahren erweisen sich oft als **stabiler**, d.h. sie sind weniger anfällig gegen Störungen, wie beispielsweise Rundungsfehler. Ein implizites Verfahren ist auch das **modifizierte Euler-Verfahren**

$$x^h(t_n) := x^h(t_{n-1}) + \frac{h}{2}f(t_{n-1}, x^h(t_{n-1})) + \frac{h}{2}f(t_n, x^h(t_n)).$$

Intermezzo 2: Chemische Reaktionskinetik In einem chemischen Reaktor werden die Stoffe A und B zusammengebracht, wobei A und B zu einem weiteren Stoff C reagieren:



Dieser neue Stoff C reagiert mit B und produziert 2 Moleküle eines Stoffes D:



Die Konzentrationen a, b, c, d der Stoffe hängen im allgemeinen sowohl vom Ort als auch von der Zeit t ab. In einem gut durchgerührten Reaktor kann man allerdings näherungsweise davon ausgehen, dass die Konzentration eines beliebigen Stoffes an jedem Ort dieselbe ist, Inhomogenitäten werden sofort durch Mischen ausgeglichen.

Nach dem Massenwirkungsgesetz ist die Änderung der Konzentration c durch die erste Reaktion proportional zum Produkt der Konzentrationen a und b. Die Proportionalitätskonstante heißt *Reaktionsrate*.

Wie vielleicht aus dem Chemie-Unterricht bekannt ist, laufen in der Regel auch die umgekehrten Reaktionen ab, allerdings oft mit einer völlig verschiedenen Reaktionsrate. Bezeichnet man die Reaktionsrate für die erste Hinreaktion mit k_1 und die Rate für die Rückreaktion mit \tilde{k}_1 und seien k_2, \tilde{k}_2 die entsprechenden Raten für die zweite Reaktion, dann gelten die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -k_1ab + \tilde{k}_1c \\ \dot{b} &= -k_1ab + \tilde{k}_1c - k_2bc + \tilde{k}_2d^2 \\ \dot{c} &= k_1ab - \tilde{k}_1c - k_2bc + \tilde{k}_2d^2 \\ \dot{d} &= +k_2bc - \tilde{k}_2d^2 \end{aligned}$$

Das ist alles noch recht überschaubar, in der Praxis hat man es jedoch oft mit mehreren Stoffen und Hunderten von möglichen Reaktionen zu tun. In diesem Fall kann man nur mit Hilfe einer Computersimulation Einblick in das Verhalten der Lösungen erhalten. Erschwert wird diese Simulation dadurch, dass viele der Reaktionskonstanten nicht oder nur unzureichend genau bekannt sind. Man muss daher versuchen, die numerische Simulation mit gemessenen Daten zu kombinieren, um auf diese Weise während der Rechnung die benötigten Parameter zu bestimmen.

4.3 Schrittweitensteuerung

Bei allen in der Praxis verwendeten Verfahren kann man zeigen, dass sie für Schrittweiten $h \searrow 0$ die Lösung richtig approximieren. Besonders wenn man die Lösung über ein großes Zeitintervall verfolgen will, möchte man möglichst große Schrittweiten wählen, dabei den (lokalen) Fehler jedoch unter einer gegebenen Schranke halten. Das ist auch extrem wichtig für sogenannte “steife” Probleme, bei denen unterschiedliche Zeitskalen auftreten und die Größenordnung der rechten Seite stark schwankt.

Die Schrittweitensteuerung wird oft auf Basis der folgenden Überlegung durchgeführt: Je größer die Schrittweite, desto kleiner der Einfluss von Rundungsfehlern, desto größer aber der lokale Diskretisierungsfehler. Für ein Verfahren der Ordnung p ist (asymptotisch)

$$\|x(t_n + 1) - x^h(t_{n+1})\| = Ch^p$$

Man tut nun so, als ob diese Beziehung tatsächlich gilt und bestimmt die Konstante C . Dann kann man daraus die optimale Schrittweite h berechnen. Leider kennt man ja auch die "echte" Lösung $x(t_n + 1)$ nicht, sonst müsste man sie ja nicht numerisch berechnen. Also ersetzt man die genaue Lösung durch eine andere, hoffentlich bessere, Näherung, zumeiste eine, die mit einem Verfahren höherer Ordnung gewonnen wird.

Da die Argumentation auf dem Vergleich des *lokalen Fehlers* beruht, benutzt man in der Praxis zum einen eine Begrenzung der Schrittweite nach oben und unten (siehe "Propagation"-Menü bei DST00L) als auch einen "Sicherheitsfaktor".

Der in DST00L eingebaute Löser **Runge-Kutta 4QC** besitzt solch eine Schrittweitensteuerung. Leider konnte ich in der Dokumentation zu DST00L keine Informationen über das zugrundeliegende Verfahren finden. Vermutlich handelt es sich aber um die Kombination zweier Runge-Kutta-Verfahren: Ein Verfahren 4. Ordnung wird benutzt, um eine Näherung für $x(t + h)$ zu berechnen. Mit einem Verfahren 5. Ordnung berechnet man eine bessere (?) Näherung und versucht, durch Vergleich dieser beiden Approximationen, die optimale Schrittweite zu bestimmen.

DST00L stellt außer dem Runge-Kutta-Verfahren mit variabler Schrittweite ein weiteres Verfahren mit Schrittweitensteuerung zur Verfügung. Das **Bulirsch-Stoer-Verfahren** verwendet die sogenannte **explizite Mittelpunktsregel** (modified midpoint method) Dabei wird der eigentliche Zeitschritt h in k kleinere Schritte der Länge h/k unterteilt. Man berechnet dann von (t_0, x_0) ausgehend

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{h}{k} f(t_0, x_0) \quad \text{expliziter Eulerschritt} \\ t_i &= t_0 + \frac{ih}{k} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, k \\ x_{i+1} &= x_{i-1} + 2\frac{h}{k} f(t_i, x_i) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Man erhält dadurch x_k als Näherung für die Lösung zur Zeit $t_0 + h$. Interessant ist, dass hier der globale Diskretisierungsfehler für gerade k nur gerade Potenzen von h enthält. Man probiert nun der Reihe nach verschiedene Unterteilungen, d.h. verschiedene k aus. Dann versucht man daraus zu extrapolieren, welchen Wert man bei einer extrem feinen Unterteilung ($k = \infty$) erhalten würde. Diesen Wert wählt man dann als Näherung für $x(t_0 + h)$

Intermezzo 3: Die Van-der-Pol-Gleichung

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= y + x(1 - x^2) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

mit einem sehr kleinen Parameter $\varepsilon \ll 1$. Was können wir über die Lösungen dieser Gleichung sagen?

Falls $y + x(1 - x^2)$ deutlich größer als ε ist, dann ist $\dot{x} = \frac{1}{\varepsilon}(y + x(1 - x^2))$ sehr groß, sowohl absolut als auch im Vergleich zu \dot{y} . Die Lösung ist also schnell und bewegt sich (fast) parallel zur y -Achse. Nur wenn $y + x(1 - x^2)$ in der Größenordnung ε ist, sind \dot{x} und \dot{y} von vergleichbarer Größe. In einer Umgebung der kubischen Parabel $y = -x(1 - x^2)$ erwartet man also eine langsamere Bewegung.

Formal kann man zunächst auch einfach $\varepsilon = 0$ setzen und erhält dann das sogenannte "langsame" System

$$\begin{aligned} 0 &= y + x(1 - x^2) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

Die erste, algebraische Gleichung beschreibt eine Kurve K , die zweite (Differential-)Gleichung kann man als Fluss auf dieser Kurve interpretieren. Sie sagt aus, wo Lösungen nach oben bzw. nach unten verlaufen. Probleme treten dabei an den Extrema der Kurve K auf.

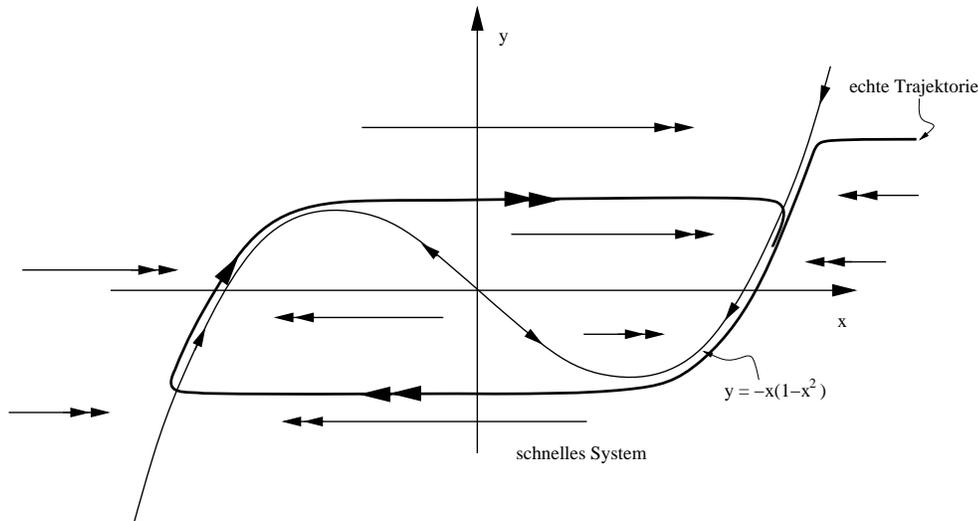


Abbildung 3: Das singular gestörte Van-der-Pol-System

Multipliziert man die ursprüngliche zweite Gleichung mit $1/\varepsilon$ und skaliert dann die rechte Seite (Euler-Multiplikator!), so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + x(1 - x^2) \\ \dot{y} &= -\varepsilon x \end{aligned}$$

Wenn man hier $\varepsilon = 0$ setzt, gelangt man zum “schnellen” System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + x(1 - x^2) \\ \dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

das die oben schon beschriebene schnelle Bewegung parallel zur x -Achse beschreibt.

Singuläre Störungstheorie sagt aus, wie man die beiden Systeme kombiniert, um Lösungen für $\varepsilon > 0$ zu erhalten. Man erhält dabei Lösungskurven, die sich abwechselnd fast genauso wie das langsame bzw. das schnelle system verhalten. Anschaulich geht das wie in Bild 3.

4.4 Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Bei den sogenannten **Prädiktor-Korrektor-Verfahren** kombiniert man ein explizites und ein implizites Verfahren miteinander. Für die Lösung des impliziten Verfahrens braucht man einen einigermaßen guten Startwert. Diesen liefert das explizite Verfahren. Das führt zu der folgenden Taktik, wobei wir zur Abkürzung $x_n^h := x^h(nh)$ und $f_n^h = f(nh, x^h(nh))$ schreiben:

Prädiktor: Berechne x_n^h mit einem expliziten Ein- oder Mehrschrittverfahren:

$$y_n^h = \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_j x_{n-j+i}^h + h \sum_{i=0}^{j-1} \beta_j f_{n-j+i}^h.$$

Korrektor: Setze $y_n^{(0)} := y_n^h$. Iteriere ein implizites Verfahren, um sukzessive $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(m)}$ zu erhalten und setze dann $x_n^h := y_n^{(m)}$. Dabei ist m entweder eine feste Zahl von Iterationen oder man iteriert so lange, bis die Korrektur $|y_n^{(m)} - y_n^{(m-1)}|$ klein genug ist.

Das bekannteste Prädiktor-Korrektor-Verfahren ist das **Adams-Bashforth-Moulton-Verfahren** (ABM-Verfahren). Genau genommen kombiniert man dabei das explizite Adams-Bashforth-Verfahren

$$x_{n+1}^{prae} = x_n + \frac{h}{12} (23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$$

als Prädiktor mit dem impliziten Adams–Moulton–Verfahren als Korrektorschritt.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24} (f(t_{n+1}, x_{n+1}^{prae}) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}).$$

In diesem Fall ist der Prädiktorschritt von 3. Ordnung und der Korrektor von 4. Ordnung.

5 Lineare Gleichungen

5.1 Die Jordan-Normalform: Das Wichtigste in Kürze

Wir bezeichnen mit $GL(n, \mathbb{R})$ bzw. $GL(n, \mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren reellen bzw. komplexen $n \times n$ -Matrizen.

In Linearer Algebra lernt man, wie man eine Matrix durch eine Koordinatentransformation auf eine möglichst einfache Gestalt bringt. Besonders einfach sind natürlich Diagonalmatrizen, aber nicht jede Matrix ist ähnlich zu einer Diagonalmatrizen. Eine einfache Form, auf die man jede komplexe $n \times n$ -Matrix A transformieren kann ist die *Jordansche Normalform*.

Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt **Eigenwert** von A , falls eine nichttriviale Lösung x der Gleichung

$$Ax = \lambda x$$

existiert. Die Menge der Eigenwerte von A nennen wir das **Spektrum** $\sigma(A)$. Die Eigenwerte sind die Lösungen der *charakteristischen Gleichung*

$$\det(A - \lambda \text{Id}) = 0.$$

Dies ist eine Gleichung n -ten Grades, die nach dem Fundamentalsatz der Algebra n nicht notwendig verschiedene Lösungen besitzt. Für jeden Eigenwert λ ist $\text{Ker}(A - \lambda \text{Id}) := K_\lambda$ ein A -invarianter Unterraum des \mathbb{C}^n , d.h. $AK_\lambda \subseteq K_\lambda$.

Definition: Die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms heißt **algebraische Vielfachheit** von λ . Die Dimension von K_λ heißt **geometrische Vielfachheit** von λ .

Wenn für alle Eigenwerte die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit ist, dann ist die Matrix A diagonalisierbar. Wenn die algebraische Vielfachheit irgendeines Eigenwerts echt größer ist als seine geometrische Vielfachheit, dann ist A nicht diagonalisierbar, es gilt aber die folgende Aussage: Es existiert eine Zerlegung

$$\mathbb{C}^n = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_m$$

in invariante Teilräume. Zu jedem dieser Teilräume X_i existiert ein Eigenwert λ_i , eine natürliche Zahl r_i und eine Basis $\{e_1, \dots, e_{r_i}\}$, so dass

$$\begin{aligned} (A - \lambda_i \text{Id}) e_1 &= 0 \\ (A - \lambda_i \text{Id}) e_2 &= e_1 \\ &\vdots \\ (A - \lambda_i \text{Id}) e_{r_i} &= e_{r_i-1}. \end{aligned}$$

Bezüglich dieser Basis hat $A|_{X_i}$ die Matrixdarstellung

$$S^{-1} A|_{X_i} S = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Man bezeichnet diese Matrix als **Jordan-Block** der Länge r_i zum Eigenwert λ_i . Die λ_i müssen dabei nicht verschieden sein. Jeder Unterraum X_i enthält genau einen Eigenvektor. Man nennt

$$E_\lambda := \bigoplus_{\lambda_i = \lambda} X_i$$

den **verallgemeinerten Eigenraum** zum Eigenwert λ .

Fasst man alle Jordan-Blöcke zusammen, so erhält man die **komplexe Jordan-Normalform** von A :

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} B_{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{\lambda_m} \end{pmatrix}$$

ist eine Blockdiagonalmatrix, die B_{λ_i} sind die Jordan-Blöcke zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, wobei m die Summe der geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte ist.

Bei der **reellen Jordanschen Normalform** für eine reelle Matrix A sehen die Blöcke etwas anders aus. Zunächst sollte man sich kurz klar machen, dass für jeden Eigenwert λ einer reellen Matrix A auch die konjugiert komplexe Zahl $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert ist, denn:

$$Ax = \lambda x \iff \overline{Ax} = \overline{\lambda x} \iff \overline{A} \overline{x} = \overline{\lambda} \overline{x} \iff A \overline{x} = \overline{\lambda} \overline{x}.$$

Bei echt komplexen Eigenwerten werden daher immer die verallgemeinerten Eigenräume zu den Eigenwerten λ und $\bar{\lambda}$ zusammengefasst. Ein Jordan-Block zum Paar komplexer Eigenwerte $\rho e^{\pm i\alpha}$ hat dann die Gestalt

$$S^{-1} A|_{X_i} S = \begin{pmatrix} \rho \cos \alpha & -\rho \sin \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \rho \sin \alpha & \rho \cos \alpha & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \cos \alpha & -\rho \sin \alpha & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \sin \alpha & \rho \cos \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \rho \cos \alpha & -\rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \rho \sin \alpha & \rho \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Beweise finden sich in Büchern über Lineare Algebra.

5.2 Die Matrix-Exponentialfunktion

Hoffentlich erinnert sich noch jeder an die Matrix-Exponentialfunktion aus Kapitel 2:

Definition: Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Dann ist die **Exponentialabbildung** definiert durch

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Die Reihe konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}$, da sie eine absolut konvergente Majorante $e^{\|A\|t}$ besitzt. Wie im Fall von Potenzreihen ($A \in \mathbb{R}$) zeigt man durch geschicktes Umordnen, dass

$$e^{At} e^{As} = e^{A(t+s)}.$$

Falls $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix ist, dann ist natürlich $e^{At} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$. Etwas allgemeiner: Hat A Blockdiagonalgestalt, dann genügt es die Exponentialabbildung der Blöcke zu berechnen, denn dann hat auch A^m für alle m dieselbe Blockdiagonalgestalt.

Im allgemeinen gilt jedoch nicht, dass $e^A e^B = e^B e^A$ (Gegenbeispiel \rightsquigarrow Übungsaufgabe). Allerdings gilt das folgende, etwas schwächere Resultat:

Lemma: Falls die beiden $n \times n$ -Matrizen A und B miteinander kommutieren, d.h. falls $AB = BA$ gilt, dann ist

$$e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A.$$

Beweis: Es gilt für alle $m \in \mathbb{N}$: $AB^m = B^m A$ und damit auch $Ae^B = e^B A$. Betrachte nun $M_1(t) := e^{At}e^{Bt}$ und $M_2(t) := e^{(A+B)t}$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}M_1(t) = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} = (A+B)M_1(t), \quad M_1(0) = \text{Id}$$

und

$$\frac{d}{dt}M_2(t) = (A+B)M_2(t), \quad M_2(0) = \text{Id}.$$

Beide Matrix-Funktionen $M_1(t)$ und $M_2(t)$ lösen also dasselbe Anfangswertproblem. Damit ist $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$. Ganz analog zeigt man $e^{Bt}e^{At} = e^{(B+A)t} = e^{(A+B)t}$ \square

Als Nächstes berechnen wir e^{At} für einen Jordan-Block:

Lemma: Sei B_λ ein Jordan-Block der Größe m zum Eigenwert λ , d.h.

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$e^{B_\lambda t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Beweis: Wir zerlegen zunächst $B_\lambda = \lambda \text{Id} + N$ mit einer nilpotenten Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Da N mit λId kommutiert, ist

$$e^{B_\lambda t} = e^{\lambda t \text{Id} + Nt} = e^{\lambda t \text{Id}} e^{Nt} = e^{\lambda t} \text{Id} e^{Nt}.$$

Die Matrix e^{Nt} läßt sich mit Hilfe der Reihendarstellung berechnen: Es ist

$$Nt = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (Nt)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

die Reihe für e^{Nt} ist also in Wirklichkeit nur eine endliche Summe mit $(m-1)$ Gliedern. \square

Das Rezept: e^{At} berechnet man also konkret wie folgt:

1. Bestimme die Jordan-Normalform J von A mitsamt der zugehörigen Transformation S , so dass $S^{-1}AS = J$. Dazu müssen die Eigenwerte, Eigenvektoren und ggf. die Hauptvektoren bestimmt werden.
2. Für einen Jordanblock B_λ der Größe m zum Eigenwert λ können wir $e^{B_\lambda t}$ nach (10) berechnen.
3. Für die gesamte Jordan-Normalform J ist e^{Jt} eine Blockdiagonalmatrix, deren Blöcke aus den Exponentialabbildungen $e^{B_\lambda t}$ der einzelnen Jordan-Blöcke bestehen.
4. Transformiere wieder zurück in die Original-Koordinaten: $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$.

Die Matrix-Exponentialfunktion verknüpft die Determinante und die Spur einer Matrix wie folgt:

Satz 5.1 (Liouville-Formel) *Sei A eine reelle oder komplexe $n \times n$ -Matrix. Dann ist*

$$\det(e^{At}) = e^{\text{Spur}(A)t}.$$

Beweis: Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass A bereits in Jordan-Normalform ist, denn Determinante und Spur einer Matrix sind als Produkt bzw. Summe der Eigenwerte invariant unter Koordinatentransformationen. Dann ist

$$\det e^{At} = \prod_j \det(e^{B_{\lambda_j} t}) = \prod_j \det(e^{\lambda_j t} e^{N_j t}).$$

Für jeden Jordan-Block B_{λ_j} ist aber $\det(e^{\lambda_j t} e^{N_j t})$ gerade $(e^{\lambda_j t})^{m_j} = e^{m_j \lambda_j t}$, wobei m_j die Größe des Jordan-Blocks ist. Die Summe der Größen der Jordan-Blöcke zu einem Eigenwert λ ist aber gerade dessen algebraische Vielfachheit, daher ist

$$\sum_j e^{m_j \lambda_j t} = e^{\text{Spur}(A)t}.$$

□

5.3 Autonome lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten mit

Satz 5.2 *Sei A eine reelle oder komplexe $n \times n$ -Matrix. Dann besitzt die lineare autonome Differentialgleichung*

$$\dot{x} = Ax$$

für jeden Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige, für alle $t \in \mathbb{R}$ definierte Lösung $x(t) = e^{At}x_0$.

“Beweis”: Das wissen wir eigentlich schon. In Kapitel 2 hatten wir gesehen, dass man die rechte Seite Ax als Vektorfeld zum Fluss $\Phi(t, x) = e^{At}x$ erhält. Aus den Ergebnissen aus Kapitel 3 (insbesondere Korollar 3.8) ergibt sich, dass die Differentialgleichung eine eindeutige, globale Lösung besitzt. □

Wie man diese Lösung, also hauptsächlich die Matrix e^{At} berechnet, haben wir im vorigen Abschnitt schon gesehen. In etwas anderer Form kann man das auch so formulieren:

Satz 5.3 (Exponentialansatz, komplex) *Alle komplexwertigen Lösungen $x(t)$ der autonomen linearen Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ sind von der Form*

$$x(t) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} p_\lambda(t) e^{\lambda t}.$$

Dabei ist p_λ ein Polynom, dessen Grad $\alpha(\lambda)$ um eins kleiner ist als der größte Jordan-Blocks zum Eigenwert λ . Es ist also

$$p_\lambda = \sum_{j=0}^{\alpha(\lambda)-1} p_{\lambda,j} t^j$$

wobei die Koeffizienten $p_{\lambda,j} \in \mathbb{C}^n$ im verallgemeinerten Eigenraum zum Eigenwert λ liegen.

Beweis: Sei $J := S^{-1}AS$ die Jordan-Normalform von A mit Jordan-Blöcken $B_{\lambda_j} = \lambda_j \text{Id} + N_j$. Die Lösung $x(t)$ zum Anfangswert x_0 ist dann

$$x(t) = e^{At}x_0 = Se^{Jt}S^{-1}x_0.$$

Betrachte nun die Projektionen P_j auf die verschiedenen invarianten Unterräume X_j der Jordan-Normalform. Dann ist

$$\begin{aligned} x(t) &= Se^{Jt}S^{-1}x_0 \\ &= \sum_j Se^{Jt}P_jS^{-1}x_0 \\ &= \sum_j Se^{\lambda_j t}e^{N_j t}P_jS^{-1}x_0 \\ &= \sum_j \underbrace{Se^{N_j t}P_jS^{-1}x_0}_{\text{Polynom in } t} e^{\lambda_j t}. \end{aligned}$$

Faßt man nun noch alle λ_i , die übereinstimmen, zusammen so kann man die Lösung auch schreiben als

$$x(t) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \left(\sum_{\{j; \lambda_j = \lambda\}} Se^{N_j t}P_jS^{-1}x_0 \right) e^{\lambda t}.$$

Da das Bild eines jeden Jordan-Blocks unter S im verallgemeinerten Eigenraum zum entsprechenden Eigenwert liegt, sind die Koeffizienten des Polynoms $p_\lambda(t)$ Vektoren aus diesem verallgemeinerten Eigenraum. \square

Wenn man mit reellen Matrizen A arbeitet, möchte man meist auch reelle Lösungen $x(t)$ finden. Reelle Matrizen sind aber nichts anderes als spezielle komplexe Matrizen. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass man von einem komplexen Vektorraum der Dimension n zu einem reellen Vektorraum der Dimension $2n$ gelangt, wenn man in Real- und Imaginärteil aufspaltet. Auch bei linearen Differentialgleichungen kann man bei komplexwertigen Lösungen Real- und Imaginärteil getrennt betrachten:

Lemma: Sei A eine reelle $n \times n$ -Matrix und $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit Anfangswert x_0 . Dann ist $x_R(t) := \text{Re } x(t)$ eine Lösung von $\dot{x} = Ax$ mit Anfangswert $\text{Re } x_0$.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_R(t) &= \text{Re } \dot{x}(t) \\ &= \text{Re } Ax(t) \\ &= A \text{Re } x(t) = Ax_R(t). \end{aligned}$$

Daher löst x_R tatsächlich die Differentialgleichung, natürlich mit dem Anfangswert $x_R(t_0) = \text{Re } x_0$ \square

Satz 5.4 (Exponentialansatz, reell) Sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$ eine reelle $n \times n$ -Matrix. Dann hat jede Lösung von $x(t)$ der autonomen linearen Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit Anfangswert $x(0) \in \mathbb{R}^n$ die Gestalt

$$x(t) = \sum_{\lambda = \alpha \pm i\omega \in \sigma(A)} (q_\lambda(t) \cos(\omega t) + r_\lambda(t) \sin(\omega t)) e^{\alpha t},$$

wobei $q_\lambda(t), r_\lambda(t)$ Vektor-Polynome sind.

Beweis:

1. Möglichkeit: Reelle Jordan-Normalform benutzen und die gesamte Theorie noch einmal beweisen.
2. Möglichkeit: Fasse A als komplexe Matrix auf. Dann lässt sich die Lösung von $\dot{x} = Ax$ schreiben als

$$x(t) = e^{At}x_0 = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} p_\lambda(t) e^{\lambda t}$$

Aus dem vorigen Lemma wissen wir, dass der Realteil dieses Ausdrucks ebenfalls eine Lösung ist, und zwar zum Anfangswert $\operatorname{Re} x_0 = x_0$. Wegen der Eindeutigkeit ist also die Lösung gegeben als

$$x(t) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re} p_\lambda(t) e^{\lambda t}$$

Zerlege dann die Polynome p_λ sowie $e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \omega t + i \sin \omega t)$ in Real- und Imaginärteil, um die im Satz angegebene Darstellung zu erhalten. \square

An dieser Stelle soll noch einmal der wichtigste Spezialfall erwähnt werden:

Rezept: Falls alle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ von A einfach sind, dann zerlegt man die Anfangsbedingung x_0 bezüglich der Basis aus Eigenvektoren v_1, v_2, \dots, v_n :

$$x_0 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n.$$

Die komplexe Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax$ mit $x(0) = x_0$ lautet dann

$$x(t) = a_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + a_n v_n e^{\lambda_n t}.$$

Die Menge der Lösungen einer linearen Differentialgleichung bildet einen Vektorraum. Bevor wir das beweisen, zur Erinnerung die folgende

Definition: Man nennt k Funktionen $f_1, f_2, \dots, f_k \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ **linear unabhängig**, falls gilt:

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \dots + \alpha_k f_k(t) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Achtung ! Beispielsweise sind die Vektoren $(1, 0)^T$ und $(t, 0)^T$ für alle Zeiten t linear abhängig, die Funktionen selbst jedoch nicht, denn

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Satz 5.5 (Vektorraumstruktur) Sei $A \in GL(n, n)$. Dann bildet die Menge der Lösungen der autonomen Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ einen n -dimensionalen Vektorraum.

Beweis: Setze $L := \{x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n); \dot{x} = Ax\}$. Dann ist L offensichtlich ein Vektorraum, da die Summe zweier Lösungen wieder eine Lösung ist und auch $\mu x(t)$ für $\mu \in \mathbb{R}$ eine Lösung liefert. Um die Dimension des Vektorraums zu finden, erinnern wir uns, dass eine Lösung $x(t)$ eindeutig durch ihren Anfangswert $x(0)$ bestimmt ist. Damit ist L isomorph zum Raum \mathbb{R}^n der möglichen Anfangsbedingungen und es ist $\dim L = n$. \square

5.3.1 Langzeitverhalten

Da wir die Lösungen von linearen Gleichungen (fast) explizit berechnen können, ist es auch möglich, das Verhalten für $t \rightarrow \infty$ zu beschreiben.

Satz 5.6 Sei A eine reelle oder komplexe $n \times n$ -Matrix.

- (i) Alle Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ konvergieren gegen 0 für $t \rightarrow \infty$ genau dann, wenn alle Eigenwerte von A in der linken komplexen Halbebene $\{z; \operatorname{Re} z < 0\}$ liegen.
- (ii) Besitzt A einen Eigenwert in der rechten Halbebene $\{z; \operatorname{Re} z > 0\}$, so gibt es eine Lösung $x(t)$ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$.
- (iii) Alle Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ sind für $t > 0$ beschränkt genau dann, wenn alle Eigenwerte von A in der abgeschlossenen linken Halbebene $\{z; \operatorname{Re} z \leq 0\}$ liegen und für alle Eigenwerte auf der imaginären Achse die geometrische und die algebraische Vielfachheit übereinstimmen.

Beweis:

(i) Wir zeigen sogar etwas mehr. Sei $\alpha > 0$ so klein, dass alle Eigenwerte von A Realteil kleiner $-\alpha$ haben. Dann gilt

$$(*) \quad \|e^{At}\| \leq Ce^{-\alpha t}$$

für alle $t \geq 0$ mit einer Konstante $C > 0$. Insbesondere gilt für Lösungen mit Anfangswert x_0

$$|x(t)| = |e^{At}x_0| = \|e^{At}\| |x_0| \leq Ce^{-\alpha t}|x_0| \rightarrow 0.$$

Dabei ist $\|\cdot\|$ eine beliebige Matrixnorm, beispielsweise $\|B\| = \max |b_{ij}|$.

Um $(*)$ zu zeigen, betrachten wir wieder ohne Einschränkung A in Jordan-Normalform. Jeder Jordanblock B_λ trägt einen Block der Form

$$e^{B_\lambda t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

zu e^{At} bei. Da $\operatorname{Re} \lambda < -\alpha$ vorausgesetzt war, sind die entsprechenden Blöcke in der Matrix $e^{\alpha t} e^{At}$ immer noch gleichmäßig beschränkt für alle $t \geq 0$. Daraus ergibt sich die Existenz einer Konstanten C mit $\|e^{\alpha t} e^{At}\| \leq C$, woraus dann sofort $(*)$ folgt.

Die Konstante C selbst hängt dabei noch von der gewählten Matrix-Norm ab, die wir nicht spezifiziert hatten (denn schließlich sind alle Matrix-Normen äquivalent).

(ii) Wähle als Anfangsbedingung x_0 den Eigenvektor v zum Eigenwert λ mit positivem Realteil. Dann ist die Lösung von der Form $x(t) = e^{\lambda t}v$, insbesondere gilt

$$|x(t)| = |e^{\lambda t}v| = e^{\operatorname{Re} \lambda t}|v| \rightarrow +\infty.$$

(iii) In diesem Fall treten keine Jordan-Blöcke der Größe 2 oder mehr für Eigenwerte auf der imaginären Achse auf. Jede Lösung ist also von der Form

$$x(t) = \sum_{\lambda \in \sigma(A), \operatorname{Re} \lambda < 0} p_\lambda(t)e^{\lambda t} + \sum_{\lambda \in \sigma(A), \operatorname{Re} \lambda = 0} c_\lambda e^{\lambda t}$$

wobei $p_\lambda(t)$ ein Polynom ist und c_λ ein konstanter Vektor. Dieser Ausdruck ist aber für alle $t \geq 0$ beschränkt, womit die Aussage bewiesen ist. \square

Wir notieren noch einmal kurz als Korollar, was wir im Laufe des Beweise über die Funktionen $t \mapsto e^{At}$ gezeigt haben:

Korollar 5.7 Sei A eine reelle oder komplexe $n \times n$ -Matrix.

(i) Falls alle Eigenwerte von A in der Halbebene $\{z; \operatorname{Re} z < -\alpha\}$ liegen, dann existiert eine Konstante $C > 0$ (die von der gewählten Matrixnorm abhängt), so dass

$$\|e^{At}\| \leq Ce^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) Falls alle Eigenwerte von A in der abgeschlossenen linken Halbebene $\{z; \operatorname{Re} z \leq 0\}$ liegen und für alle Eigenwerte auf der imaginären Achse die geometrische und die algebraische Vielfachheit übereinstimmen, dann existiert eine Konstante $M > 0$, so dass

$$\|e^{At}\| \leq M \quad \forall t \geq 0.$$

5.3.2 Gleichungen höherer Ordnung

Lineare Gleichungen höherer Ordnung

$$x^{(m)} + a_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

mit konstanten Koeffizienten lassen sich umschreiben als System 1. Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

wobei $\mathbf{x} = (x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(m-1)})^T \in \mathbb{R}^m$ und A eine sogenannte Frobenius-Matrix ist:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{m-2} & -a_{m-1} \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte einer solchen Matrix sind Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

mit Eigenvektoren $(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{m-1})^T$. Natürlich können auch hier mehrfache Eigenwerte auftreten, deren algebraische Vielfachheit echt größer als die geometrische Vielfachheit ist.

Falls $x \in \mathbb{R}^k$ schon vektorwertig ist, dann funktioniert dieselbe Reduktion. In diesem Fall ist \mathbf{x} ein Vektor der Länge mk , die a_i sind $k \times k$ -Matrizen und die Einträge in der Matrix A sollte man sich jeweils als $k \times k$ -Matrix vorstellen, insbesondere entspricht jede "1" einer k -dimensionalen Einheitsmatrix.

5.4 Lineare Differenzgleichungen

Durch Iteration können wir die Lösung der linearen autonomen Differenzgleichung 1. Ordnung

$$x_n = Ax_{n-1}$$

mit Anfangswert x_0 sofort hinschreiben als

$$x_n = A^n x_0.$$

Potenzen der Matrix A berechnet man wieder am besten, indem man A in die Jordan-Normalform transformiert.

Differenzgleichungen höherer Ordnung

$$x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \dots + a_mx_{n-m}$$

löst man wieder, indem man sie als System 1. Ordnung für den Vektor

$$\mathbf{x}_n = (x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, x_{n-m+3}, \dots, x_n)^T$$

schreibt:

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \dots & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{n-1}.$$

Analog geht man vor, wenn

$$x_n = A_1x_{n-1} + A_2x_{n-2} + \dots + A_mx_{n-m}$$

eine lineare Differenzgleichung m -ter Ordnung für den Vektor $x_n \in \mathbb{R}^k$ ist.

5.5 Klassifikation ebener linearer Differentialgleichungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt ebene autonome Differentialgleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy\end{aligned}$$

mit reellen Koeffizienten a, b, c und d . Man kann beispielsweise die lineare **gedämpfte Pendelgleichung**

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2x = 0$$

mit reeller Dämpfung $\gamma > 0$ und "Eigenfrequenz" $\omega > 0$ in diese Form bringen (mit $a = 0, b = 1, c = -\omega^2$ und $d = -\gamma$).

Das charakteristische Polynom der Matrix $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \text{spur}A \lambda + \det A = 0.$$

Mit den Abkürzungen $\Delta := \det A = ad - bc$ und $S := \text{spur}A = a + d$ lauten dann die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4\Delta}}{2}.$$

Die Eigenwerte hängen also nicht von den vier Parametern a, b, c und d , sondern nur von den zwei reellen Größen Δ und S ab.

Es sind nun eine ganze Menge Fälle zu unterscheiden:

(A) $S^2 - 4\Delta > 0$

(A1) $\Delta < 0$

Dann sind beide Eigenwerte reell mit unterschiedlichem Vorzeichen, das Gleichgewicht $x = y = 0$ ist ein **Sattel**. In Jordan-Normalform lautet die Lösung $x(t) = e^{\lambda_1 t}x_0, y(t) = e^{\lambda_2 t}y_0$. Daher haben Trajektorien die Gestalt

$$y(t) = (e^{\lambda_1 t}x_0)^{\lambda_2/\lambda_1} y_0 x_0^{-\lambda_2/\lambda_1} = C(x_0, y_0)x(t)^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

Der Exponent $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ ist hier negativ. Für eine Skizze des Phasenportraits siehe Abbildung 4.

(A2) $S > 0, \Delta > 0$

Dann sind beide Eigenwerte reell mit positivem Realteil. Die Ruhelage $x = y = 0$ ist ein **instabiler Knoten**. Die Trajektorien lassen sich in derselben Form darstellen wie im Fall eines Sattels, allerdings ist der Exponent $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ diesmal positiv.

(A3) $S < 0, \Delta > 0$

Dann sind beide Eigenwerte reell mit negativem Realteil. Die Ruhelage $x = y = 0$ ist ein **stabiler Knoten**.

(A4) $S > 0, \Delta = 0$

Eigenwerte sind dann $\lambda_1 = S > 0$ und $\lambda_2 = 0$. Die Ruhelage $x = y = 0$ ist Teil einer (instabilen) Linie von Gleichgewichten.

(A5) $S < 0, \Delta = 0$

Eigenwerte sind dann $\lambda_1 = S < 0$ und $\lambda_2 = 0$. Die Ruhelage $x = y = 0$ ist Teil einer (stabilen) Linie von Gleichgewichten.

(B) $S^2 - 4\Delta < 0$

(B1) $S > 0$

Dann besitzt A zwei konjugiert komplexe Eigenwerte mit positivem Realteil. Lösungen sind von der Form $x(t) = x_0 e^{\alpha t} \cos \omega t, y(t) = y_0 e^{\alpha t} \sin \omega t$ mit $\alpha > 0$. Die Ruhelage $x = y = 0$ ist ein **instabiler Strudel**.

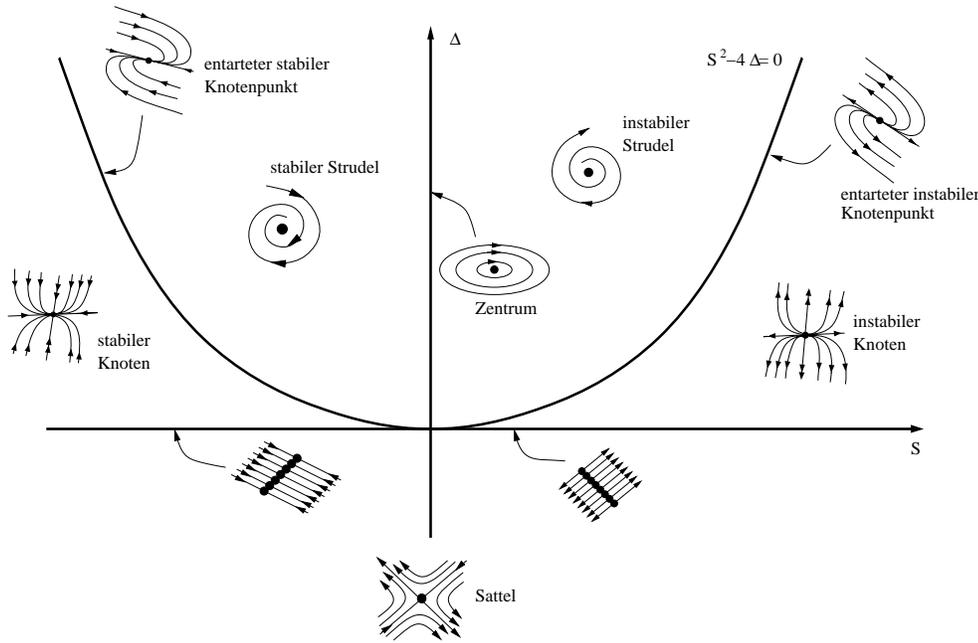


Abbildung 4: Klassifikation ebener linearer Differentialgleichungen

(B2) $S < 0$

Dann besitzt A zwei konjugiert komplexe Eigenwerte mit negativem Realteil. Die Ruhelage $x = y = 0$ ist ein **stabiler Strudel**.

(B3) $S = 0$ Dann besitzt A zwei rein imaginäre Eigenwert $\pm 2i\sqrt{-\Delta}$. Die Lösungskurven sind Ellipsen, die Ruhelage ist ein **Zentrum**.

(C) $S^2 - 4\Delta = 0$

(C1) $S > 0$

Dann besitzt A einen negativen doppelten Eigenwert λ mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1. Die Lösung hat in Jordan-Normalform die Gestalt $x(t) = e^{\lambda t}x_0 + te^{\lambda t}y_0$, $y(t) = e^{\lambda t}y_0$. Die Ruhelage $x = y = 0$ ist dann ein **instabiler entarteter Knoten**.

(C2) $S < 0$

Die Ruhelage $x = y = 0$ ist dann ein **stabiler entarteter Knoten**.

5.6 Variation-der-Konstanten

Um nicht-autonome inhomogene Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = Ax + b(t), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

zu lösen, erweist es sich (wie in Übungsaufgabe 5 für $x \in \mathbb{R}$) als sinnvoll, $y(t) := e^{-A(t-t_0)}x(t)$ zu betrachten. Dann ist

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -Ae^{-A(t-t_0)}x(t) + e^{-A(t-t_0)}\dot{x}(t) \\ &= -Ay(t) + e^{-A(t-t_0)}(Ax + b(t)) \\ &= e^{-A(t-t_0)}b(t). \end{aligned}$$

Die rechte Seite hängt überhaupt nicht von y ab. Durch direkte Integration erhält man also

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(s-t_0)}b(s) ds$$

und somit

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}b(s) ds.$$

Diese Formel wird uns noch einige Male begegnen !

Die Variation–der–Konstanten–Schreibweise kann man auch für echt nichtlineare Gleichungen

$$\dot{x} = Ax + g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

verwenden. Angenommen, wir kennen die Lösung $\tilde{x}(t)$ dieser Gleichung schon und setzen dann $b(t) := g(\tilde{x}(t))$. Die Gleichung $\dot{x} = Ax + b(t)$ hat dann natürlich ebenfalls die Lösung $\tilde{x}(t)$ die man in der Form

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s) ds = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}g(x(s)) ds$$

darstellen kann. Die Gültigkeit dieser Darstellung kann man auch durch Differentiation leicht nachprüfen.

Eine entsprechende Formel gibt es auch für diskrete dynamische Systeme:

Für inhomogene lineare Differenzgleichungen

$$x_n = Ax_{n-1} + b_{n-1}$$

gilt die **diskrete Variation–der–Konstanten–Formel**

$$x_n = A^n x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} b_j,$$

die man natürlich mit Vollständiger Induktion beweisen kann:

Induktionsanfang ($n = 1$): $x_1 = A^1 x_0 + b_0 = A^1 x_0 + \sum_{j=0}^0 A^{0-j} b_j$

Induktionsschritt ($n \rightarrow n + 1$):

$$x_{n+1} = Ax_n + b_n = A(A^n x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} b_j) + b_n = A^{n+1} x_0 + \sum_{j=0}^n A^{n-j} b_j.$$

5.7 Nichtautonome lineare Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt geht es zunächst um nichtautonome Gleichungen der Form

$$\dot{x} = A(t)x,$$

bei denen die $n \times n$ -Matrix $A(t)$ stetig von t abhängt. Nach Korollar 3.8 besitzt diese Gleichung eine globale (d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$) definierte Lösung.

Die Lösungen bilden wie im autonomen Fall einen Vektorraum, d.h. es gilt das **Superpositionsprinzip**:

$$x_1(t), x_2(t) \text{ Lösung, } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \implies \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \text{ Lösung.}$$

Da die Lösung wie im autonomen Fall eindeutig durch ihren Wert zu einer festen Zeit bestimmt ist, ist die Dimension des Vektorraums gerade n .

Wir bezeichnen wie früher mit $\Phi_{t,s}(\cdot)$ die Evolution zur nichtautonomen Gleichung, es ist also $\Phi_{t,t_0}(x_0)$ die Lösung $x(t)$ zur Zeit t mit Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$. Wegen des Superpositionsprinzips ist die Evolution $\Phi_{t,s}(\cdot)$ eine lineare Abbildung, d.h. durch eine $n \times n$ -Matrix $\Phi(t, s)$ gegeben.

Definition: Die Matrix $\Phi(t, s)$ heißt **Übergangsmatrix**.

Da Φ eine Evolution ist, gilt

$$\Phi(t, s) = \Phi(t, 0) \circ \Phi(0, s) = \Phi(t, 0) \circ \Phi(s, 0)^{-1}.$$

Insbesondere benötigt man also nur die Matrizen $\Phi(t, 0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, um alle Übergangsmatrizen $\Phi(t, s)$ berechnen zu können. Leider gibt es kein allgemeines Verfahren, wie man $\Phi(t, 0)$ aus $A(t)$ berechnet.

Viele Leute haben in den letzten 150 Jahren viel Zeit darauf verwandt, die Übergangsmatrizen und ihre Eigenschaften in wichtigen Spezialfällen genauer zu beschreiben. Wir werden es meist bei dem Ausdruck $\Phi(t, s)$ belassen.

Definition: Sei $A \in GL(n)$. $\Phi(t, 0)$ heißt **Fundamental-Lösung** und ist die Lösung der Matrix-Differentialgleichung

$$\dot{Y} = AY$$

mit $Y(0) = \text{Id}$.

Für jede Lösung Y dieser Matrix-Differentialgleichung (mit beliebiger Anfangsbedingung $Y(0)$) heißt die Determinante $W(t) := \det Y(t)$ **Wronski-Determinante** zur Lösung $Y(t)$.

Achtung ! Wieder einmal ist die Notation bei verschiedenen Mathematikern und in verschiedenen Büchern unterschiedlich. Gelegentlich heißen Lösungen der Matrix-Differentialgleichung mit $\det Y(0) \neq 0$ schon Fundamental-Lösung und die Lösung mit $Y(0) = \text{Id}$ Hauptfundamental-Lösung.

Kennt man eine Fundamentallösung, dann kann man das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(0) = x_0$$

für *jeden* Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ bzw. \mathbb{C}^n sofort lösen: Es ist $x_0 = \Phi(0, 0)x_0$, und da $\Phi(t, 0)$ Fundamental-Lösung ist, gilt für $x(t) := \Phi(t, 0)x_0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{\Phi}(t, 0)x_0 \\ &= A(t)\Phi(t, 0)x_0 \\ &= A(t)x(t). \end{aligned}$$

Daher ist $x(t)$ die Lösung zum Anfangswert x_0 .

Obwohl man die Lösung der nicht-autonomen linearen Differentialgleichung nur selten explizit berechnen kann, gelingt dies für die Wronski-Determinante immer.

Satz 5.8 Für die Wronski-Determinante W der Fundamental-Lösung $\Phi(t, 0)$ gilt:

$$W(t) = \exp\left(\int_0^t \text{Spur } A(s) \, ds\right).$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass die Wronski-Determinante W die Differentialgleichung

$$\dot{W}(t) = \text{Spur } A(t)W(t), \quad W(0) = 1.$$

erfüllt, da $\exp\left(\int_0^t \text{Spur } A(s) \, ds\right)$ die Lösung dieses Anfangswertproblems ist. Es ist

$$\begin{aligned} \det \Phi(t+h, 0) &= \det \Phi(t+h, t) \circ \det \Phi(t, 0) \\ &= \det(\text{Id} + hA(t) + \mathcal{O}(h)) \det \Phi(t, 0) \end{aligned}$$

Die Berechnung der Determinante als Summe über die verschiedenen Permutationen ergibt:

$$\begin{aligned} \det(\text{Id} + hA(t) + \mathcal{O}(h)) &= \det\left(h\left(\frac{1}{h} + A(t) + \mathcal{O}(h)\right)\right) = h^n \det\left(\frac{1}{h} + A(t) + \mathcal{O}(h)\right) \\ &= h^n \left(\left(\frac{1}{h}\right)^n + \left(\frac{1}{h}\right)^{n-1} \text{Spur } A(t) + \mathcal{O}(h^{-n+2}) \right) \\ &= 1 + h \text{Spur } A(t) + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

Daraus schließt man, dass

$$\det \Phi(t+h, 0) - \det \Phi(t, 0) - h \text{Spur } A(t) = \mathcal{O}(h).$$

Also ist $\Phi(t, 0)$ differenzierbar nach t mit Ableitung

$$\frac{d}{dt} \det \Phi(t, 0) = \text{Spur } A(t) \det \Phi(t, 0),$$

mit anderen Worten

$$\dot{W}(t) = \text{Spur } A(t)W(t).$$

□

Genauso zeigt man, dass

$$\det \Phi(t, t_0) = \exp \left(\int_{t_0}^t \text{Spur } A(s) \, ds \right).$$

Korollar 5.9 Die Wronski-Determinante $W(t)$ einer Fundamental-Lösung ist für alle Zeiten ungleich 0.

Satz 5.8 kann auch dazu benutzt werden, zu $n-1$ linear unabhängige Lösungen einer linearen Differentialgleichung die "letzte" noch fehlende Lösung zu bestimmen (**Reduktionsverfahren von d'Alembert**). Meistens geht es dabei um den Fall $n = 2$, denn wann findet man in einem 6-dimensionalen System ausgerechnet 5 linear unabhängige Lösungen, ohne auch die 6. zu kennen?

5.8 Der Satz von Liouville

Der vorhergehende Satz besitzt auch interessante Anwendungen auf *nichtlineare* Gleichungen:

Satz 5.10 (Satz von Liouville) Betrachte die nichtlineare Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ mit zugehörigem Fluss Φ_t .

$$\frac{d}{dt} |\Phi_t(V)| = \int_{\Phi_t(V)} \text{div} f(x) \, dx = \int_{\Phi_t(V)} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} \right) dx.$$

Beweis: Es ist zunächst mit Hilfe der Transformationsregel

$$|\Phi_t(V)| = \int_{\Phi_t(V)} 1 \, dx = \int_V \det(D_x \Phi_t) \, dx.$$

Nun ist $\Phi_t(y)$ die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ mit Anfangswert $x(0) = y$. Aus Kapitel 3 wissen wir, dass dann $D\Phi_t(y)$ die Lösung der Variationsgleichung

$$\dot{Y} = A(t)Y$$

mit $A(t) := Df(x(t))$ ist. Nach dem vorigen Satz 5.8 erhält man

$$\frac{d}{dt} \det D\Phi_t(y) = \text{spur } Df(\Phi_t(y)) \det D\Phi_t(y) = \text{div} f(\Phi_t(y)) \det D\Phi_t(y).$$

Daher ist

$$\frac{d}{dt} |\Phi_t(V)| = \int_V \frac{d}{dt} \det(D\Phi_t) \, dx = \int_V \text{div} f(\Phi_t(y)) \det D\Phi_t(y) \, dy = \int_{\Phi_t(V)} \text{div} f(x) \, dx.$$

□

Korollar 5.11 (i) Ist $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ divergenzfrei, so ist der Fluss zur Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ volumenerhaltend, d.h. für kompakte Mengen K gilt $|\Phi_t(K)| = |K|$ für alle t .

(ii) Der Fluss Φ_t zum Hamilton-System

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned}$$

ist volumenerhaltend.

Beweis: (i) ist unmittelbar klar.

(ii) Die Divergenz der rechten Seite ist

$$\sum_i -\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} = 0.$$

□

Beispiel: Für die Lorenz–Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta z + xy \end{aligned}$$

mit den “klassischen” Parametern $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ und $\rho = 28$ gilt

$$\operatorname{div} f = -\sigma - 1 - \beta < 0$$

Volumina werden also kontrahiert. Insbesondere sieht man daran, dass der Lorenz-Attraktor eine Menge vom dreidimensionalen Lebesgue-Maß 0 ist und daher keine offenen Kugeln enthalten kann.

Satz 5.12 (Poincaréscher Wiederkehrsatz) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega$ ein volumenerhaltender Homöomorphismus. Dann gilt:

Zu jedem Punkt $x \in \Omega$, jeder Umgebung U von x und jeder natürlichen Zahl n_0 existiert ein Punkt $y \in U$ und ein $n \geq n_0$, so dass $\Phi^n(y) \in U$, der Orbit von y kehrt also in die Nähe von x zurück.

Beweis: Wegen der Volumenerhaltung gilt $|\Phi^n(U)| = |U|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere können daher nicht alle Mengen $\Phi^{n_0}(U), \Phi^{2n_0}(U), \Phi^{3n_0}(U), \dots$ disjunkt sein. Sei also $\Phi^{kn_0}(U) \cap \Phi^{ln_0}(U) \neq \emptyset$ mit $k > l$. Dann gibt es $y, z \in U$ mit

$$\Phi^{kn_0}(y) = \Phi^{ln_0}(z) \Rightarrow z = \Phi^{(k-l)n_0}(y) \in U.$$

□

Bemerkung: Beispielsweise können wir als Φ die Zeit-1-Abbildung eines volumenerhaltenden Flusses betrachten. Falls also unter dem Fluss eines Hamilton-System eine beschränkte Menge in sich abgebildet wird, dann gilt für diese Menge der Poincarésche Wiederkehrsatz. Insbesondere ist der Satz also wahr für Hamiltonsche Flüsse auf kompakten Mannigfaltigkeiten.

Auch für nicht-autonome lineare Differentialgleichungen gilt eine **Variation-der-Konstanten-Formel**: Die Lösung der inhomogenen linearen Gleichung

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)$$

mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$ erhält man mit Hilfe der Übergangs-Matrizen $\Phi(t, s)$ als

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)b(s) ds.$$

Allerdings hat man nur in Ausnahmefällen eine geschlossene Darstellung für die Matrizen $\Phi(t, s)$. Dennoch ist diese Art, Lösungen von inhomogenen Gleichungen in Integralform darzustellen äußerst nützlich. Wie schon bei autonomen Gleichungen kann man auch die Lösung echt nichtlinearer Gleichungen

$$\dot{x} = A(t)x + g(x(t))$$

in der Variation-der-Konstanten-Form

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)g(x(s)) ds$$

darstellen.

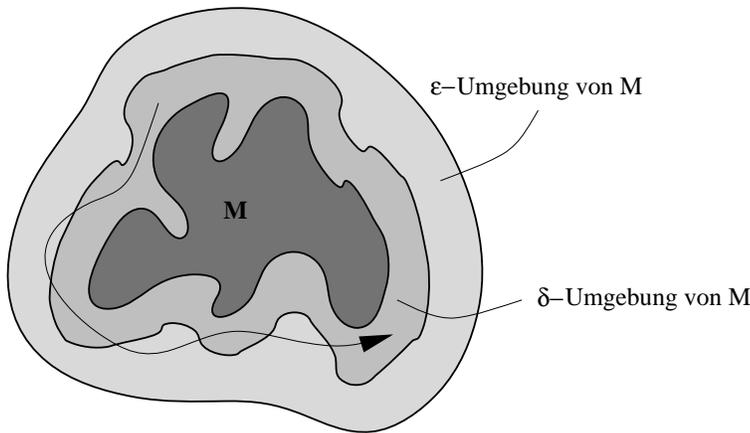


Abbildung 5: Lyapunov-Stabilität

6 Stabilität

Definition: Sei Φ_t ein Fluss. Eine Menge M heißt **positiv invariant**, falls $\Phi_t(M) \subseteq M$ für alle Zeiten $t \geq 0$. Analog heißt M **negativ invariant**, falls $\Phi_t(M) \subseteq M$ für alle negativen Zeiten $t \leq 0$ und **invariant**, falls $\Phi_t(M) \subseteq M$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Zu den invarianten Mengen gehören beispielsweise Ruhelagen und periodische Orbits, aber auch der Lorenz-Attraktor. Bei der Untersuchung solcher invarianter Mengen (bzw. Ruhelagen und periodischen Lösungen) interessiert man sich nicht nur für die Menge selbst, sondern auch für das Verhalten von Trajektorien in der Nähe. Ein besonders wichtiger Aspekt ist die Stabilität.

Definition: Sei Φ_t ein Fluss auf \mathbb{R}^n und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, kompakte, invariante Menge. M heißt **(Lyapunov)-stabil**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\text{dist}(x_0, M) < \delta \Rightarrow \text{dist}(\Phi_t(x_0), M) < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Die Menge M heißt **asymptotisch stabil**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle x_0 mit $\text{dist}(x_0, M) < \varepsilon$ gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\Phi_t(x), M) = 0.$$

Bemerkung: Die beiden Begriffe sind unabhängig: es gibt invariante Mengen, die asymptotisch stabil, aber nicht stabil sind (\leadsto Übungen, bzw. Amann S. 221).

Für lineare Gleichungen $\dot{x} = Ax$ haben wir die (asymptotische) Stabilität der Ruhelage $x = 0$ schon untersucht. Eine andere Formulierung von Korollar 5.7 (ii) ist

Satz 6.1 (Stabilität, autonom, linear) Sei A eine reelle oder komplexe $n \times n$ -Matrix. Dann ist die Ruhelage $x = 0$ genau dann stabil, wenn A keine Eigenwerte in der rechten Halbebene $\{\text{Re}z > 0\}$ besitzt und für alle Eigenwerte auf der imaginären Achse die geometrische und die algebraische Vielfachheit übereinstimmt.

Ganz genauso kann man Korollar 5.7 (i) umformulieren und erhält

Satz 6.2 (asymptotische Stabilität, autonom, linear) Sei A eine reelle oder komplexe $n \times n$ -Matrix. Dann ist die Ruhelage $x = 0$ genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von A in der linken Halbebene $\{\text{Re}z < 0\}$ liegen.

Dieser Satz behält (im Gegensatz zu Satz 6.1) seine Gültigkeit, wenn man auf der rechten Seite der Differentialgleichung eine kleine Störung addiert:

Satz 6.3 (asymptotische Stabilität, autonom, nichtlinear) Sei A eine reelle oder komplexe $n \times n$ -Matrix, deren Eigenwerte alle in der linken Halbebene $\{\operatorname{Re} z < 0\}$ liegen, und sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit

$$g(x) = \mathcal{O}(|x|), \text{ d.h. } \lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|g(x)|}{|x|} = 0.$$

Dann ist die Ruhelage $x = 0$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax + g(x)$$

asymptotisch stabil.

Beweis: Wir wollen zeigen, dass für Anfangsbedingungen x_0 mit $|x_0| \leq \delta$ die Lösung für alle Zeiten $t \geq 0$ existiert und dass $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ gilt. Dazu werden wir das Gronwall-Lemma 3.7 verwenden. Wie schon in Kapitel 5 erwähnt kann man die Lösung $x(t)$, solange sie existiert, mit Hilfe der Variation-der-Konstanten-Formel schreiben als

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}g(x(s)) \, ds.$$

Da die Matrix A nur Eigenwerte in der linken komplexen Halbebene besitzt, existiert $\alpha > 0$, so dass sogar alle Eigenwerte in $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z < -\alpha\}$ liegen. Dann ist wegen Korollar 5.7

$$|x(t)| = Ce^{-\alpha t}x_0 + \int_0^t Ce^{-\alpha(t-s)}|g(x(s))| \, ds.$$

Jetzt wählen wir ein $\delta > 0$, so dass gilt

$$|x| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{C}.$$

Sei nun

$$x_0 \in U := \{x; |x| \leq \frac{\delta}{C} \leq \delta\}.$$

Dann existiert $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, denn

$$|x(t)| \leq \delta e^{-\alpha t} + \int_0^t \varepsilon e^{-\alpha(t-s)}|x(s)| \, ds.$$

Für $u(t) := e^{\alpha t}|x(t)|$ gilt dann

$$u(t) \leq \delta + \int_0^t \varepsilon u(s) \, ds,$$

zumindest solange $|x(s)| \leq \delta$. Aus der Gronwall-Ungleichung folgt dann direkt

$$u(t) \leq \delta + \int_0^t \varepsilon \delta e^{\varepsilon(t-s)} \, ds = \delta e^{\varepsilon t}.$$

Für $x(t)$ bedeutet das

$$|x(t)| \leq \delta e^{-(\alpha-\varepsilon)t}.$$

Insbesondere bleibt tatsächlich $|x(t)| \leq \delta$ für alle Zeiten $t \geq 0$ und $x(t)$ konvergiert exponentiell schnell gegen 0. □

Die Aussage von Satz 6.3 heißt gelegentlich auch *Prinzip der linearisierten Stabilität*. Das versteht man besser, wenn man die folgende alternative Formulierung betrachtet:

Satz 6.4 Betrachte die autonome Differentialgleichung

$$(*) \quad \dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $f(0) = 0$. Dann gilt: Ist die Ruhelage $x = 0$ asymptotisch stabil für die linearisierte Gleichung

$$\dot{x} = Df(0)x,$$

so ist $x = 0$ auch asymptotisch stabil für (*).

Falls $x = 0$ für die linearisierte Gleichung nur stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist, dann erlaubt dies keine Aussage über die Stabilität von $x = 0$ in der nichtlinearen Gleichung. Vielmehr müssen dann wirklich die nichtlinearen Terme höherer Ordnung genau untersucht werden.

Beispiel: Wir betrachten wieder einmal die Lorenz-Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta z + xy.\end{aligned}$$

Diesmal wollen wir $\sigma = 10$ und $\beta = \frac{8}{3}$ festhalten und ρ beginnend bei $\rho = 0$ langsam erhöhen. Unabhängig von allen Parametern ist immer $x = y = z = 0$ eine Ruhelage. Die Linearisierung in dieser Ruhelage ist

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-\sigma - 1 \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - \rho)})$, und $\lambda_3 = -\beta$. Zunächst ist die Ruhelage für $0 \leq \rho < 1$ daher asymptotisch stabil. Sie wird instabil für $\rho > 1$. Bei dieser *Pitchfork-Verzweigung* entstehen zwei neue Ruhelagen $(\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$, die für $1 < \rho < \rho_H$ asymptotisch stabil sind. Die Eigenwerte der Linearisierung in diesen Ruhelagen genügen der kubischen Gleichung

$$\lambda^3 + (\beta + \sigma + 1)\lambda^2 + \beta(\sigma + \rho)\lambda + 2\beta\sigma(\rho - 1) = 0.$$

Man kann zeigen (Hurwitz-Kriterium), dass die Eigenwerte bis zum Wert

$$\rho_H = \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1}$$

negativen Realteil haben. Dann werden auch diese Ruhelagen instabil und es entstehen periodische Orbits in ihrer Nähe *Hopf-Verzweigung*. Für die üblichen Parameter $\sigma = 10$ und $\beta = \frac{8}{3}$ geschieht dies bei $\rho_H = 24.74\dots$ Schon bei etwas kleineren ρ -Werten entsteht der bekannte Lorenz-Attraktor. Viele dieser Änderungen ("Verzweigungen") kann man mit DSTOOL numerisch beobachten.

6.1 Stabilität von Fixpunkten in diskreten Systemen

Auch für diskrete dynamische Systeme kann man die Stabilität von Fixpunkten mit Hilfe des Spektrums der Linearisierung untersuchen. Für eine lineare Abbildung

$$x_{n+1} = Ax_n$$

ist $x = 0$ asymptotisch stabil, genau dann wenn alle Eigenwerte vom Betrag kleiner als 1 sind. Diese Aussage erhält man aus der Darstellung der Lösung als

$$x_n = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} p_\lambda(n)\lambda^n,$$

wobei $p_\lambda(n)$ ein Polynom in n ist, dessen Grad gerade um eins kleiner ist als der größte Jordan-Block zum Eigenwert λ . Für ein beliebiges Polynom $p(n)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < 1$ gilt aber (\leadsto Analysis I)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(n)\lambda^n = 0.$$

Analog ist der Fixpunkt $x = 0$ stabil genau dann, wenn alle Lösungen beschränkt bleiben, wenn also alle Eigenwerte vom Betrag kleiner oder gleich 1 sind und für alle Eigenwerte auf dem komplexen Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ die algebraische und die geometrische Vielfachheit übereinstimmt.

Falls A einen Eigenwert vom Betrag größer als 1 besitzt, ist der Fixpunkt $x = 0$ instabil. Dazu braucht man nur die Iteration des zugehörigen Eigenvektors zu betrachten.

Mit Hilfe der diskreten Variation-der-Konstanten-Formel kann man wie im kontinuierlichen Fall zeigen, dass auch hier das Prinzip der linearisierten Stabilität gilt:

Satz 6.5 (Stabilität, nichtlinear, diskret) *Betrachte die nichtlineare Abbildung*

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

mit $f \in C^1$ und einem Fixpunkt x_* . Falls die Jacobi-Matrix $DF(x_*)$ in diesem Fixpunkt x_* nur Eigenwerte im Innern des komplexen Einheitskreises besitzt, so ist dieser Fixpunkt asymptotisch stabil.

6.2 Stabilität von periodischen Lösungen, Floquet-Theorie

Wir betrachten in diesem Abschnitt ausschließlich nicht-autonome lineare Differentialgleichungen

$$\dot{x} = A(t)x,$$

bei denen A eine **periodische** Funktion von t ist. Gleichungen dieses Typs treten insbesondere als Linearisierung, bzw. Variationsgleichung entlang von periodischen Orbits auf, vergleiche Abschnitt 3.4. Die Periodizität von A spiegelt sich auch in der Periodizität der zugehörigen Übergangsmatrizen wider:

Lemma: *Betrachte*

$$\dot{x} = A(t)x$$

mit einer p -periodischen Matrix-Funktion $A(t)$. Für die zugehörige Evolution $\Phi(t, s)$ impliziert die Periodizität von A die Relation

$$\Phi(t + p, s + p) = \Phi(t, s) \quad \forall s, t \in \mathbb{R},$$

Beweis: Sowohl $\Phi(t + p, s + p)$ als auch $\Phi(t, s)$ sind Lösungen des selben Anfangswertproblems:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t + p, s + p) = A(t + p)\Phi(t + p, s + p) = A(t)\Phi(t + p, s + p)$$

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, s) = A(t)\Phi(t, s).$$

Anfangswerte: $\Phi(t_0 + p, t_0 + p) = \Phi(t_0, t_0) = \text{Id}$ Wegen der Eindeutigkeit müssen daher $\Phi(t + p, s + p)$ und $\Phi(t, s)$ übereinstimmen. \square

Es gilt der folgende wichtige Satz, der zeigt, wie sich bei periodischen linearen Differentialgleichungen die Übergangsmatrizen in einen zeitlich periodischen und einen autonomen Anteil zerlegen lassen.

Satz 6.6 (Floquet) *Sei $A(t)$ eine reelle oder komplexe $n \times n$ -Matrix, die stetig von t abhängt und periodisch ist mit Periode p :*

$$A(t + p) = A(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dann hat die Fundamental-Lösung $\Phi(t, 0)$ der Matrix-Differentialgleichung

$$\dot{Y} = A(t)Y$$

die Darstellung

$$\Phi(t, 0) = Z(t)e^{Bt},$$

wobei die $n \times n$ -Matrix B nicht von t abhängt und $Z(t)$ eine p -periodische Matrixfunktion ist.

Beweis:

Falls alles gut geht, ist wegen der Periodizität $Z(p) = Z(0) = \text{Id}$. Wir müssen also eine Matrix B finden, für die $\Phi(p, 0) = e^{Bp}$ gilt. Das geht so:

$C := \Phi(p, 0)$ ist eine nicht-singuläre Matrix. Ohne Einschränkung ist C in Jordan-Normalform. Wie schon früher betrachten wir einzelne Jordan-Blöcke $\lambda \cdot \text{Id} + N$ mit einer nilpotenten Matrix N . Da C nicht-singulär ist, muss $\lambda \neq 0$ sein und wir können $\alpha \in \mathbb{C}$ finden, so dass $\lambda = e^\alpha$. (Dabei ist α nicht eindeutig bestimmt, sondern nur bis auf $2\pi i\mathbb{Z}$.) Sei nun

$$L := \log \left(\text{Id} + \frac{1}{\lambda} N \right) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{\left(\frac{1}{\lambda} N\right)^j}{j}.$$

In Wirklichkeit ist diese Summe endlich, da ja N nilpotent ist, und mit Hilfe der Potenzreihen kann man nachprüfen, dass tatsächlich $e^L = \text{Id} + \frac{1}{\lambda}N$ ist. Diese nicht ganz kurze Rechnung führen wir hier nicht durch. Insgesamt ist dann

$$e^{\alpha \text{Id} + L} = e^{\alpha} \text{Id} e^L = \lambda (\text{Id} + \frac{1}{\lambda}N) = C.$$

Die Matrix $B := \frac{1}{p}(\alpha \text{Id} + L)$ hat also die gewünschte Eigenschaft $\Phi(p, 0) = e^{Bp}$.

$Z(t) := \Phi(t, 0)e^{-Bt}$ ist p -periodisch, denn es ist

$$\begin{aligned} Z(t+p) &= \Phi(t+p, 0)e^{-B(t+p)} \\ &= \Phi(t, -p)e^{-Bp}e^{-Bt} \quad (\text{siehe Lemma}) \\ &= \Phi(t, 0)\Phi(0, -p)\Phi(p, 0)^{-1}e^{-Bt} \\ &= \Phi(t, 0)\Phi(p, 0)\Phi(p, 0)^{-1}e^{-Bt} \quad (\text{siehe Lemma}) \\ &= \Phi(t, 0)e^{-Bt} \\ &= Z(t). \end{aligned}$$

□

Definition: Die Eigenwerte $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ der Matrix B heißen **Floquet-Exponenten**, sie sind nur bis auf ganzzahlige Vielfache von $\frac{2\pi i}{p}$ bestimmt. Die Eigenwerte $e^{\mu_1}, e^{\mu_2}, \dots, e^{\mu_n}$ von $\Phi(p, 0)$ heißen **Floquet-Multiplikatoren**. Sie sind eindeutig bestimmt. Manchmal werden die Floquet-Exponenten auch als **charakteristische Exponenten** bezeichnet.

Der Satz zeigt, dass sich die Lösungen der nicht-autonomen linearen Gleichung verhalten wie Lösungen einer autonomen Differentialgleichung $\dot{x} = Bx$, versehen mit einer p -periodischen "Schwankung" $Z(t)$. Etwas präziser kann man das auch so formulieren:

Korollar 6.7 *Betrachte noch einmal die lineare Differentialgleichung*

$$\dot{x} = A(t)x$$

mit p -periodischem $A \in C^0(\mathbb{R}, GL(n))$. Dann gibt es eine nicht-singuläre p -periodische Koordinaten-Transformation $\Psi(t)$, so dass die Differentialgleichung in den transformierten Koordinaten autonom ist.

Beweis: Seien $B, Z(t)$ wie in Satz 6.6. Es bietet sich an $x = Z(t)y$ zu setzen. Dann erfüllt y wegen

$$\dot{x} = \dot{Z}(t)y + Z(t)\dot{y} = A(t)x = A(t)Z(t)y$$

die Differentialgleichung

$$\dot{y} = Z(t)^{-1} \left(A(t)Z(t) - \dot{Z}(t) \right) y.$$

Es ist aber $Z(t) = \Phi(t, 0)e^{-Bt}$, also

$$\dot{Z}(t) = A(t)\Phi(t, 0)e^{-Bt} - Z(t)B = A(t)Z(t) - Z(t)B$$

und schließlich

$$\dot{y} = Z(t)^{-1} (A(t)Z(t) - A(t)Z(t) + Z(t)B) y = By.$$

□

Damit ist klar, dass die Stabilität durch die Matrix B bzw. deren Spektrum bestimmt ist. Es gilt der folgende Satz:

Satz 6.8 *Betrachte die homogene lineare Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)x$ mit p -periodischen Koeffizienten $A(t)$.*

- (i) *Die Ruhelage $x = 0$ ist genau dann stabil (d.h. alle Lösungen sind beschränkt), wenn alle Floquet-Exponenten in der abgeschlossenen linken Halbebene $\{\text{Re} z \leq 0\}$ liegen und für die Floquet-Exponenten auf der imaginären Achse die algebraische und die geometrische Vielfachheit übereinstimmt.*

(ii) Die Ruhelage $x = 0$ ist genau dann asymptotisch stabil (d.h. alle Lösungen konvergieren gegen 0), wenn alle Floquet-Exponenten in der offenen linken Halbebene $\{\operatorname{Re} z < 0\}$ liegen.

Bemerkung:

- 1) **Wichtig !** Die Frage, ob die Eigenwerte von B in der linken komplexen Halbebene liegen oder nicht, läßt sich **nicht** direkt mit Hilfe der Spektren der Matrizen $A(t)$ beantworten. Es gibt Gegenbeispiele, die zeigen, dass B Eigenwerte in der rechten komplexen Halbebene besitzen kann, selbst wenn für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ alle Eigenwerte von $A(t)$ in der linken Halbebene liegen !.
- 2) Für die Floquet-Multiplikatoren lautet das entsprechende Kriterium: Die Ruhelage $x = 0$ ist asymptotisch stabil, falls alle Floquet-Multiplikatoren im Inneren des komplexen Einheitskreises liegen.

Beispiel: Kopfstehendes Pendel (Arnol'd, S. 269 f.)

Eine interessante Anwendung der Stabilitätstheorie für periodische Systeme ist die Stabilisierung der oberen normalerweise instabilen Ruhelage eines Pendels der Länge ℓ durch schnelle vertikale Schwingungen des Aufhängepunkts. Die Bewegungsgleichung lautet in diesem Fall

$$\ddot{x} = (\omega^2 + h(t))x$$

mit einer 2τ -periodischen Funktion

$$h(t) = \begin{cases} -\alpha^2 & \text{für } 0 < t \leq \tau, \\ +\alpha^2 & \text{für } \tau < t \leq 2\tau. \end{cases}$$

Die Amplitude a der vertikalen Schwingung ist dabei so mit der Frequenz der Anregung verknüpft, dass die Beschleunigung ω^2 sich immer um denselben Wert ändert. Bei konstanter Beschleunigung $-\alpha^2$ auf $[0, \tau]$, bzw. $+\alpha^2$ auf $[\tau, 2\tau]$ ergibt sich für die Bewegung $A(t)$ des Aufhängepunktes um seine Ruhelage

$$A(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha^2 t(\tau - t) & \text{für } 0 \leq t \leq \tau \\ \frac{1}{2}\alpha^2 (t - \tau)(t - 2\tau) & \text{für } \tau \leq t \leq 2\tau \end{cases}$$

mit 2τ -periodischer Fortsetzung. Man muss $\alpha^2 = \frac{8a}{\tau^2}$ wählen, damit die Maximalauslenkung $A(\tau/2) = (\alpha^2 \tau^2)/8$ gerade a ist.

Für $a = 0$ ist $x = 0$ ein Sattelpunkt mit Eigenwerten $\pm\omega$, also instabil. Dabei ist $\omega = \sqrt{g/\ell}$ wie in Beispiel 1.1.5.

Wir schreiben die Gleichung wieder um als System 1. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\omega^2 + h(t)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Für $a > 0$ kann man die lineare Differentialgleichung auf $[0, \tau]$ und $[\tau, 2\tau]$ jeweils explizit lösen. Falls die Schwingung schnell genug ist, dann ist $\alpha^2 := 8a/\tau^2 > \omega^2$, d.h. die Matrix $A(t)$ hat dann für $t \in (0, \tau]$ ein Paar imaginärer Eigenwerte und für $t \in (\tau, 2\tau]$ zwei reelle Eigenwerte.

Man erhält dann für die Übergangsmatrix nach einer vollen Periode die Darstellung

$$\Phi(2\tau, 0) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cosh k\tau & k^{-1} \sinh k\tau \\ k \sinh k\tau & \cosh k\tau \end{pmatrix}}_{\Phi(2\tau, \tau)} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \Omega\tau & \Omega^{-1} \sin \Omega\tau \\ -\Omega \sin \Omega\tau & \cos \Omega\tau \end{pmatrix}}_{\Phi(\tau, 0)}$$

mit $k^2 = \alpha^2 + \omega^2$ und $\Omega^2 = \alpha^2 - \omega^2$. Nun zur Frage der Stabilität: Da beide Matrizen $\Phi(2\tau, \tau)$ und $\Phi(\tau, 0)$ die Determinante 1 haben, gilt auch $\det \Phi(2\tau, 0) = 1$ und die Eigenwerte der Übergangsmatrix $\Phi(2\tau, 0)$ (d.h. die Floquet-Multiplikatoren) lauten

$$\lambda_{\pm} = \frac{\operatorname{spur} \Phi(2\tau, 0) \pm \sqrt{(\operatorname{spur} \Phi(2\tau, 0))^2 - 1}}{2}.$$

Die Stabilitätsbedingung lautet daher

$$\begin{aligned} & |\operatorname{spur} \Phi(2\tau, 0)| < 2 \\ \iff & |2 \cosh k\tau \cos \omega\tau + (k/\Omega - \Omega/k) \sinh k\tau \sin \Omega\tau| < 2. \end{aligned}$$

Man setzt nun voraus, dass

$$\varepsilon^2 := \frac{a}{\ell} \ll 1 \quad \text{und} \quad \mu^2 := \frac{g}{\alpha^2} \ll 1$$

beide sehr klein sind. Dann ist

$$k\tau = 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1+\mu^2}, \quad \Omega\tau = 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1-\mu^2}$$

und

$$\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k} = 2\mu^2 + \mathcal{O}(\mu^4)$$

und man kann entwickeln:

$$\begin{aligned} \cosh k\tau &= 1 + 4\varepsilon^2(1 + \mu^2) + \frac{2}{3}\varepsilon^4 + \dots, \\ \cos \Omega\tau &= 1 - 4\varepsilon^2(1 - \mu^2) + \frac{8}{3}\varepsilon^4 + \dots, \\ \left(\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k}\right) \sinh k\tau \sin \Omega\tau &= 16\varepsilon^2\mu^2 + \dots \end{aligned}$$

Damit erhält man als Stabilitätsbedingung

$$2(1 - 16\varepsilon^4 + \frac{16}{3}\varepsilon^4 + 8\varepsilon^2\mu^2 + \dots) + 16\varepsilon^2\mu^2 < 2$$

und unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung

$$\mu < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{g}{\alpha^2} < \frac{a}{3\ell}.$$

Für die Details der Rechnung, siehe [Arnol'd].

Bemerkung: Ähnlich wie man im vorhergehenden Beispiel eine instabile Ruhelage durch äußere Anregung stabilisieren kann, kann man auch eine stabile Ruhelage durch periodische Anregung instabil machen. Die meisten Menschen hierzulande begegnen dieser Tatsache mit etwa drei Jahren, wenn sie alleine schaukeln lernen. Dabei wird durch die Verlagerung des Schwerpunktes die Länge des "Pendels" periodisch variiert.

6.3 Kleiner Ausblick: Lyapunov-Exponenten

Man kann die Überlegungen des letzten Abschnitts noch sehr viel weiter verallgemeinern. Betrachten wir aber zunächst noch einmal einen p -periodischen Orbit x_{per} einer Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$. Das Verhalten der Lösungen in der Nähe dieses periodischen Orbits ist bestimmt durch die Floquet-Multiplikatoren, bzw. im wesentlichen durch den Floquet-Multiplikator mit dem größten Realteil.

Man kann nun eine ganz allgemeine (nicht unbedingt periodische) Trajektorie $x(t)$ betrachten und untersuchen, wie sich andere Lösungen in der Nähe dieser Trajektorie verhalten. Dazu untersucht man die Linearisierung entlang von $x(t)$ und fragt sich: Wenn diese nichtautonome lineare Gleichung Lösungen hat, die sich wie $e^{\lambda t}$ verhalten, wie groß ist dann λ ? Mit anderen Worten: mit welcher exponentiellen Rate laufen Lösungen in der Nähe von $x(t)$ (im Mittel) zusammen bzw. auseinander? Entscheidend ist dabei wieder die exponentielle Rate mit dem größten Realteil. Diese erhält man aus der Formel

$$\lambda_{Lyapunov} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|D\Phi_t(x_0)\|,$$

falls dieser Limes überhaupt existiert.

Im Fall eines diskreten dynamischen Systems $x_{n+1} = f(x_n)$ hat man analog

$$\lambda_{Lyapunov} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|D(f^n)(x_0)\| \tag{11}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln \|Df(x_j)\| \tag{12}$$

wobei die Identität

$$D(f^n)(x_0) = Df(f^{n-1}(x_0)) Df(f^{n-2}(x_0)) \dots Df(f(x_0)) Df(x_0)$$

benutzt wurde. Auch hier ist die Existenz des Grenzwerts zunächst völlig unklar. Es ist eigentlich ziemlich erstaunlich, dass man die Existenz dieses Limes unter ziemlich allgemeinen Bedingungen nachweisen kann:

Satz 6.9 (Oseledec, 1968, Grobversion) *Falls das diskrete dynamische System $x_{n+1} = f(x_n)$ die Trajektorien gut genug "mischt", dann existiert*

$$\lambda_{Lyapunov} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|D(f^n)(x_0)\|$$

für "fast alle" Anfangswerte x_0 und stimmt für diese Anfangswerte überein.

Die Eigenschaft, dass f die Trajektorien genügend mischt, macht man dabei fest an der Existenz eines ergodischen, invarianten Maßes. Was das ist, werden wir in der Vorlesung "Dynamische Systeme II" lernen. Bezüglich dieses invarianten Maßes ist auch die "fast alle"-Aussage zu verstehen.

Die genauen Bedingungen und den Beweis des Satzes kann man in Büchern über Ergodentheorie finden.

6.4 ω -Limesmengen

Um das Verhalten eines dynamischen Systems für große Zeiten zu beschreiben, führt man den Begriff der ω -Limesmenge ein. Für eine einzelne Trajektorie mit Anfangswert x_0 unter einem Fluss Φ schreiben wir im folgenden wieder $\Phi_t(x_0)$.

$$\gamma_+(x_0) := \{\Phi_t(x_0), t \geq 0\}$$

bezeichnet den **Vorwärtsorbit** durch x_0 und

$$\gamma_-(x_0) := \{\Phi_t(x_0), t \leq 0\}$$

den **Rückwärtsorbit** durch den Punkt x_0 .

Definition: Wir nennen

$$\omega(x_0) := \{y \in X, \exists t_n \nearrow +\infty, y = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n}(x_0)\}$$

die ω -Limesmenge von x_0 . Ganz analog nennen wir

$$\alpha(x_0) := \{y \in X, \exists t_n \searrow -\infty, y = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n}(x_0)\}$$

die α -Limesmenge von x_0 .

Bemerkung: Direkt aus der Definition folgt

$$\omega(x_0) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_+(\Phi_t(x_0))} \tag{13}$$

und entsprechend

$$\alpha(x_0) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\gamma_-(\Phi_t(x_0))},$$

wobei \overline{M} den Abschluss einer Menge M bezeichnet.

Es ist durchaus möglich, dass die ω -Limesmenge leer ist. Der folgende Satz beschreibt die wichtigsten Eigenschaften von ω -Limesmengen.

Satz 6.10 *Sei der Vorwärtsorbit $\gamma_+(x_0)$ beschränkt. Dann ist $\omega(x_0)$*

(i) *nichtleer*

(ii) kompakt

(iii) invariant und

(iv) zusammenhängend.

Dasselbe gilt für $\alpha(x_0)$, falls der Rückwärtsorbit $\gamma_-(x_0)$ beschränkt ist.

Eine Menge heißt dabei *zusammenhängend* (\rightsquigarrow Topologie I), falls sie sich nicht in zwei nicht leere disjunkte, abgeschlossene Teilmengen zerlegen läßt.

Beweis: Wir zeigen die Aussagen nur für $\omega(x_0)$, alles geht genauso für die α -Limesmengen.

- (i) Betrachte eine beliebige Folge $t_n \rightarrow +\infty$, dann ist die Folge $(\Phi_{t_n}(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, enthält also eine konvergente Teilfolge $\Phi_{t_{n_k}}(x_0)$ mit

$$x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{t_{n_k}}(x_0).$$

Dann ist $x_\infty \in \omega(x_0)$.

- (ii) Benutze diesmal (13), um zu zeigen, dass $\omega(x_0)$ abgeschlossen ist: Für jedes feste $t \geq 0$ ist $\overline{\gamma_+(\Phi_t(x_0))}$ abgeschlossen. Da der Durchschnitt abgeschlossener Mengen immer abgeschlossen ist, gilt dies auch für $\omega(x_0)$. Weiter ist $\omega(x_0)$ beschränkt und daher kompakt.
- (iii) Sei $y \in \omega(x_0)$ und $T \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $\Phi_T(y) \in \omega(x_0)$. Zunächst existiert eine Folge $t_n \rightarrow +\infty$, so dass $\Phi_{t_n}(x_0) \rightarrow y$. Dann gilt aber

$$\begin{aligned} \Phi_{t_n+T}(x_0) &= \Phi_T \circ \Phi_{t_n}(x_0) \quad \text{wegen Flusseigenschaft von } \Phi \\ &\rightarrow \Phi_T(y) \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \text{wegen der Stetigkeit des Flusses } \Phi_T \end{aligned}$$

Da $t_n + T \rightarrow \infty$, ist $\Phi_T(y) \in \omega(x_0)$.

- (iv) Hier argumentiert man indirekt und nimmt an, dass $\omega(x_0)$ *nicht* zusammenhängend ist. Dann existieren zwei disjunkte, abgeschlossene, nichtleere Mengen ω_1 und ω_2 , so dass $\omega(x_0) = \omega_1 \cup \omega_2$.

Da ω_1 und ω_2 abgeschlossen und beschränkt sind, sind beide Mengen kompakt und lassen sich daher trennen: Es gibt $\varepsilon > 0$, so dass die Umgebungen $U_\varepsilon(\omega_1)$ und $U_\varepsilon(\omega_2)$ immer noch disjunkt sind. Die Trajektorie $\gamma_+(x_0)$ kann nicht vollständig in einer der beiden Umgebungen liegen. Wähle daher eine Folge $t_n \rightarrow +\infty$, so dass $\Phi_{t_n}(x_0) \notin U_\varepsilon(\omega_1) \cup U_\varepsilon(\omega_2)$. Diese Folge besitzt eine konvergente Teilfolge, deren Limes in $\omega(x_0)$, aber weder in ω_1 noch in ω_2 liegt. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $\omega(x_0) = \omega_1 \cup \omega_2$.

□

6.5 Lyapunov-Funktionen

Ein Hilfsmittel, um die Stabilität von invarianten Mengen nachzuweisen, sind sogenannte Lyapunov-Funktionen. In einem gewissen Sinne handelt es sich um eine Verallgemeinerung von Ersten Integralen.

Definition: Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$. Dann heißt die stetig differenzierbare Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ **Lyapunov-Funktion**, falls gilt:

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)) \leq 0$$

längs Lösungen $x(t)$.

Beispiele:

1. **Gradienten-Systeme**

Gleichungen der Form

$$\dot{x} = -\nabla F(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

bei denen die rechte Seite der Gradient einer skalaren Funktion F ist, bringen ihre Lyapunov-Funktion schon mit: Es gilt nämlich

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = -\nabla F(x)\dot{x} = -f(x)^2 \leq 0$$

2. **Nichtlineare Pendel mit Reibung**

Betrachte wie in Kapitel 2 ein nichtlineares Pendel $\ddot{x} + g(x) = 0$, diesmal aber mit Reibung:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + g(x) = 0, \quad \gamma > 0.$$

Dann ist $V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + G(x)$ mit $G'(x) = g(x)$ eine Lyapunovfunktion, denn es ist

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{x}\ddot{x} + g(x)\dot{x} = -\gamma\dot{x}^2 \leq 0.$$

3. **Traveling waves**

Bei partiellen Differentialgleichungen der Form

$$u_t = u_{xx} + W'(u)$$

sucht man oft nach Lösungen $u(t, x) = U(x - ct)$, die sich mit konstanter Form und Geschwindigkeit c fortbewegen. Mit $\xi := x - ct$ löst U dann die Gewöhnliche Differentialgleichung

$$-cU' = U'' + W'(U).$$

Für die Funktion

$$V(U(\xi), U'(\xi)) := \frac{1}{2}U'(\xi)^2 + W(U(\xi))$$

gilt daher

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}V(U(\xi), U'(\xi)) &= U'(\xi)U''(\xi) + W'(U(\xi))U'(\xi) \\ &= -cU'(\xi)^2 \end{aligned}$$

Wenn also $c \geq 0$ ist, dann ist V eine Lyapunov-Funktion, ansonsten $-V$.

Das Ganze funktioniert auch noch für Systeme $u \in \mathbb{R}^n$ und Gleichungen der Form

$$u_t = D\Delta u + \nabla W(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

mit einer Diagonalmatrix D und einer Nichtlinearität, die Gradientenform hat.

4. **Neuronale Netzwerke**

Die ANregung gekoppelter Neuronen (Nervenzellen) wird beschrieben durch ein System von Differentialgleichungen

$$\dot{u}_i = -u_i + \sum_{j=1}^N T_{ij}g(u_j) + I_i$$

$i = 1, 2, \dots, N$, wobei N die Anzahl der Neuronen ist, (T_{ij}) eine symmetrische Matrix und g eine differenzierbare, monoton wachsende Funktion mit $g(0) = 0$ ist. Jedes Neuron erfährt also eine gewisse Dämpfung, aber auch eine Anregung durch die übrigen Neuronen, sowie eine globale Anregung I_i .

Betrachte $w_i := g(u_i)$ als neue Koordinaten und setze $G(w_i) := \int_0^{w_i} g^{-1}(z) dz$. Dann ist

$$V(w_1, w_2, \dots, w_N) := -\frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij}w_iw_j + \sum_i G(w_i) - \sum_i w_iI_i$$

eine Lyapunov-Funktion.

Dazu berechnet man zunächst

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial w_i} &= -\frac{1}{2} \sum_j T_{ij} w_j - \frac{1}{2} \sum_j T_{ji} w_j + g^{-1}(w_i) - I_i \\ &= -\sum_{j=1}^N T_{ij} g(u_j) + u_i - I_i \\ &= -\dot{u}_i\end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial w_i} \frac{dw_i}{dt} = \sum_{i=1}^N -\dot{u}_i \underbrace{g'(u_i)}_{\geq 0} \dot{u}_i \leq 0.$$

Wie Lyapunov-Funktionen und Stabilität zusammenhängen zeigt beispielsweise das folgende einfache Lemma:

Lemma: Sei V Lyapunov-Funktion und $x = 0$ sei ein striktes lokales Minimum von V , d.h. es existiert Umg. U mit $V(y) > V(0)$ für alle $y \in U \setminus \{0\}$. Dann ist $x = 0$ ein stabiles Gleichgewicht.

Beweis: Zeige zunächst, dass $x = 0$ ein Gleichgewicht ist.

Stabilität: Wähle eine Umgebung $U_\varepsilon(0)$. Sei $\alpha := \min\{V(y); y \in \partial U_\varepsilon(0)\}$. Wegen der Eigenschaft von V und der Kompaktheit des Randes $\partial U_\varepsilon(0)$ ist $\alpha > 0$. Wähle nun $\delta > 0$ klein genug, so dass

$$\beta := \max\{V(y); y \in \overline{U_\delta(0)}\} < \alpha.$$

Dann gilt für $x_0 \in U_\delta(0)$ natürlich $V(x_0) \leq \beta$ und daher auch $V(\Phi_t(x_0)) \leq \beta$ für alle $t \geq 0$. $\Phi_t(x_0)$ erreicht also nie den Rand von $U_\varepsilon(0)$, d.h. $x = 0$ ist stabil. \square

Auch zur asymptotischen Stabilität kann man mit Hilfe von Lyapunov-Funktionen Aussagen treffen:

Lemma: Sei V eine Lyapunov-Funktion für $\dot{x} = f(x)$ mit

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) = 0 \iff f(x) = 0$$

und $x = 0$ sei sowohl isolierte Nullstelle von f als auch lokales striktes Minimum von f . Dann ist $x = 0$ asymptotisch stabil.

Beweis: \rightsquigarrow Übungsaufgabe?

Satz 6.11 (Invarianzprinzip von La Salle) Sei Φ_t Fluss mit Lyapunov-Funktion V und $\omega(x_0) \neq \emptyset$. Dann ist $\omega(x_0)$ in einer Niveaumenge $\{x; V(x) = \text{const.}\}$ enthalten:

$$y_1, y_2 \in \omega(x_0) \implies V(y_1) = V(y_2).$$

Beweis: Da die ω -Limesmenge nichtleer vorausgesetzt wurde, existiert $y_0 \in \omega(x_0)$ und eine Folge $t_n \rightarrow \infty$ mit $\Phi_{t_n}(x_0) \rightarrow y_0$. V ist monoton fallend entlang der Trajektorie $\Phi_t(x_0)$, also existiert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\Phi_t(x_0)) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Natürlich muss dann

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\Phi_t(x_0)) = V(y_0)$$

sein und für alle Punkte y aus der ω -Limesmenge gilt wegen der Stetigkeit von V :

$$V(y) = \lim_{t_n \rightarrow \infty} V(\Phi_{t_n}(x_0)) = V(y_0).$$

□

Bemerkung: Damit gilt dann insbesondere, dass

$$\omega(x_0) \in \{x; \dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) = 0\}.$$

6.6 Mittelung (Averaging)

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Stabilität von Lösungen unter kleinen **periodischen** Störungen. Dabei geht es anders als bisher nicht um Lyapunov–Stabilität oder asymptotische Stabilität, sondern man möchte zeigen, dass die Lösungen der gestörten und der ungestörten Gleichung über einen endlichen, aber von der Größe der Störung ε abhängigen Zeitraum nahe beieinander bleiben.

Ein typisches Ziel dabei ist es zu zeigen, dass Lösungen mit derselben Anfangsbedingung nach der Zeit $t = 1/\varepsilon$ sich nur um $c\varepsilon$ unterscheiden. Ganz naiv würde man ja vermuten, dass eine Störung der Größe ε , die über eine Zeit der Ordnung $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$ einwirkt am Ende eine Differenz der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ bewirkt. Solche Probleme mit periodischen Störungen tauchen auch an Stellen auf, an denen man sie nicht auf den ersten Blick erkennt.

Als Beispiel dafür betrachten wir einen “schwach nichtlinearen” Oszillator

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x})$$

mit $|\varepsilon| \ll 1$, den wir auch als System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \varepsilon f(x, \dot{x}) \end{aligned}$$

schreiben können. Die “Störung” f wird dabei keineswegs periodisch angenommen, sie soll nur stetig differenzierbar und beschränkt sein.

Für $\varepsilon = 0$ sind alle Lösungen von der Form

$$x(t) = r \cos(t + \phi), \quad y(t) = r \sin(t + \phi)$$

mit einem Parameter ϕ , der durch die Anfangsbedingungen bestimmt ist.

Für $\varepsilon \neq 0$ kann man nun Lösungen in der Form

$$x(t) = r(t) \cos(t + \phi(t)), \quad y(t) = -r(t) \sin(t + \phi(t))$$

suchen und Gleichungen für r und ϕ herleiten. Das geht ähnlich wie bei der Transformation von Gleichungen auf Polarkoordinaten. Es ist

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{r}(t) \cos(t + \phi(t)) - r(t)(1 + \dot{\phi}(t)) \sin(t + \phi(t)) = -r(t) \sin(t + \phi(t)) \\ \dot{y}(t) &= -\dot{r}(t) \sin(t + \phi(t)) - r(t)(1 + \dot{\phi}(t)) \cos(t + \phi(t)) = -r \cos(t + \phi) + \varepsilon f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi)). \end{aligned}$$

Durch geeignete Linearkombinationen dieser Gleichungen erhält man für r und ϕ dann

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= -\varepsilon \sin(t + \phi(t)) f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi)) =: -\varepsilon g(t, r, \phi) \\ \dot{\phi}(t) &= -\frac{\varepsilon}{r} \cos(t + \phi) f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi)) =: -\frac{\varepsilon}{r} h(t, r, \phi). \end{aligned}$$

Falls nun $r \neq 0$, dann ist die rechte Seite dieser Gleichung klein (nämlich $\mathcal{O}(\varepsilon)$) und 2π –periodisch in t . Man möchte nun die Lösungen dieser Gleichung mit den Lösungen der autonomen Gleichung vergleichen, die man erhält, wenn man die periodischen rechten Seiten durch ihre Mittelwerte

$$\begin{aligned} \hat{g}(r, \phi) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t, r, \phi) dt, \\ \hat{h}(r, \phi) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t, r, \phi) dt \end{aligned}$$

ersetzt.

Die Motivation dafür ist die folgende:

Skaliert man die Zeit, indem man $\tau := \varepsilon t$ einführt, dann gelten bezüglich dieser neuen Zeit die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} r'(\tau) &= -g\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, r, \phi\right) \\ \phi'(\tau) &= -\frac{1}{r}h\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, r, \phi\right). \end{aligned}$$

Die kleinen 2π -periodischen Störungen kann man also auch auffassen als große, aber hochzillatorische Störungen. Man hofft, dass sich von diesen Störungen nur der Mittelwert auswirkt und alles andere sich "im Mittel" ausgleicht. Präziser sagt das der folgende Satz.

Satz 6.12 (Averaging) *Betrachte das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0.$$

Wir nehmen an, dass f und g stetig differenzierbar sind und mitsamt ihren Ableitungen gleichmäßig beschränkt sind. (Diese Annahmen kann man ohne Probleme abschwächen, wenn es nötig ist.) Weiter sei f eine T -periodische Funktion und

$$\hat{f}(y) := \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt$$

sei der Mittelwert von f . Mit $y(t)$ bezeichnen wir die Lösung des gemittelten Anfangswertproblems

$$\dot{y} = \varepsilon \hat{f}(y), \quad y(0) = x_0.$$

Dann gilt:

$|x(t) - y(t)| = \mathcal{O}(\varepsilon)$ auf der Zeitskala $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$, d.h. es existieren $\varepsilon_0 > 0$, so dass

$$|x(t) - y(t)| \leq C_1 \varepsilon \quad \text{für } 0 \leq t \leq \frac{C_2}{\varepsilon}$$

gilt für alle $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ mit Konstanten $C_1, C_2 > 0$, die nicht von ε abhängen.

Beweis: Wir suchen eine Koordinatentransformation $x = \xi + \varepsilon h(t, \xi)$, so dass ξ die Differentialgleichung

$$\dot{\xi} = \varepsilon \hat{f}(\xi) + \varepsilon^2 R(\xi, t, \varepsilon)$$

erfüllt. Dabei soll h eine beschränkte Funktion sein, damit x und ξ $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -nahe sind. Es gilt

$$\dot{\xi} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial \xi} \dot{\xi} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} = \varepsilon f(t, \xi + \varepsilon h(t, \xi)) + \varepsilon^2 g(t, \xi + \varepsilon h(t, \xi), \varepsilon)$$

Daher ist

$$\dot{\xi} = -\varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon f(t, \xi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Um die gewünschte Form für die ξ -Gleichung zu erzielen, muss gelten:

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, \xi) = -f(t, \xi) + \hat{f}(\xi).$$

Löse diese Gleichung, um h zu erhalten. Da die rechte Seite Mittelwert 0 hat, ist h eine T -periodische Funktion und damit insbesondere gleichmäßig beschränkt.

Wir schätzen nun die Differenz zwischen $y(t)$ und der Lösung $\xi(t)$ von

$$\dot{\xi} = \varepsilon \hat{f}(\xi) + \varepsilon^2 R(\xi, t, \varepsilon), \quad \xi(0) = x_0$$

ab. Es ist

$$\frac{d}{dt} |\xi(t) - y(t)| \leq \varepsilon |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(y)| + \varepsilon^2 |R(\xi, t, \varepsilon)|.$$

Wegen der Bedingungen an f und g ist \hat{f} Lipschitz-stetig und R gleichmäßig beschränkt. Wir erhalten daher

$$\frac{d}{dt}|\xi(t) - y(t)| \leq \varepsilon L|\xi - y| + \varepsilon^2 C_R.$$

Mit der Gronwall-Ungleichung 3.7 erhält man dann

$$\begin{aligned} |\xi(t) - y(t)| &\leq \varepsilon^2 C_R + \int_0^t \varepsilon^2 C_R L e^{L\varepsilon(t-s)} ds \\ &= C_R \varepsilon^2 (e^{L\varepsilon t} - 1). \end{aligned}$$

Für $0 \leq t \leq \frac{C_2}{\varepsilon}$ ist die rechte Seite von der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Damit ist

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - \xi(t)| + |\xi(t) - y(t)| = \varepsilon |h(t, \xi)| + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

für Zeiten der Ordnung $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$. □

Ein weiteres wichtiges Resultat zu kleinen periodischen Störungen besagt, dass ein Fixpunkt des gemittelten Systems normalerweise zu einem kleinen periodischen Orbit des periodisch gestörten Systems wird.

Satz 6.13 *Betrachte die Gleichung*

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{14}$$

wobei f eine stetig differenzierbare Funktion sei, die T -periodisch in der Variablen t ist. Wir definieren ähnlich wie oben den Mittelwert von f als

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(s, y, 0) ds.$$

Falls y_0 eine Ruhelage der gemittelten Gleichung $\dot{y} = \varepsilon \hat{f}(y)$ ist und $\det D\hat{f}(y_0) \neq 0$ ist, dann besitzt die Gleichung (14) für kleine ε genau einen T -periodischen Orbit in einer kleinen Umgebung von y_0 .

Beweis: Eine Lösung $x(s)$ von (14) mit Anfangswert x_0 ist T -periodisch genau dann, wenn

$$x_0 + \varepsilon \int_0^T f(s, x(s), \varepsilon) ds = x_0 \tag{15}$$

Insbesondere ist dann

$$|x(t) - x_0| \leq \varepsilon \int_0^T |f(s, x(s), \varepsilon)| ds = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

für $t \in [0, T]$. Man kann daher den Integranden nach ε entwickeln und erhält

$$f(s, x(s), \varepsilon) = f(s, x_0, 0) + \varepsilon R(s, x_0, \varepsilon)$$

mit einer Funktion R , die stetig differenzierbar ist. Damit erhält man aus Gleichung (15)

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_0, 0) + \varepsilon R(s, x_0, \varepsilon) ds = \hat{f}(x_0) + \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T R(s, x_0, \varepsilon) ds = 0.$$

Für $\varepsilon = 0$ kennen wir eine Lösung $x_0 = y_0$. Die Ableitung der linken Seite nach x_0 in $(x_0 = y_0, \varepsilon = 0)$ ist gerade $D\hat{f}(y_0)$. Da $D\hat{f}(y_0)$ invertierbar vorausgesetzt war, folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, dass lokal nahe $\varepsilon = 0$ eine Lösung $x_0(\varepsilon)$ existiert. □

Bemerkung: Averaging kann man noch in viele Richtungen verfeinern:

1. Man kann $\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon)$ betrachten mit f , das nicht periodisch ist in t . Falls aber

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s, y, 0) ds$$

für alle y existiert, kann man ähnlich vorgehen wie im periodischen Fall.

2. Man kann auch versuchen, durch weitere Koordinatentransformationen die Genauigkeit der Approximation noch zu steigern. Das geht analog wie bei unserer Koordinatentransformation $x \mapsto \xi$, ist in konkreten Fällen, aber meist viel schwieriger durchzuführen als die einfache Mittelung 1. Ordnung.
3. Vor allem im Zusammenhang mit Hamilton-Systemen interessiert man sich für Systeme, die sich auf die Form

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon \tilde{H}(I, \phi) \\ \dot{\phi} &= \omega \end{aligned}$$

bringen lassen. Dabei ist im einfachsten Fall $I \in \mathbb{R}$ und $\phi \in S^1$, die Herausforderungen treten allerdings hauptsächlich im Fall $I = (I_1, I_2, \dots, I_n) \in \mathbb{R}^n, \phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \in \mathbb{T}^n$ auf. Hier hängt das Verhalten entscheidend von den Frequenzen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ab: Es können sogenannte **Resonanzen** auftreten (d.h. die Frequenzen sind rational abhängig), die die Analysis *sehr* schwierig machen.

7 Lokale Struktur von Vektorfeldern

In diesem Kapitel geht es darum, möglichst viel über die Struktur der Orbits in einer kleinen Umgebung eines gegebenen Punktes auszusagen. Dabei macht es einen wesentlichen Unterschied, ob dieser gegebene Punkt ein Gleichgewicht ist oder nicht. Im letzten Fall kann man nämlich durch geschickte Wahl der Koordinaten jedes Vektorfeld in eine sehr einfache Form bringen, während in der Umgebung eines Gleichgewichts alles nicht so einfach ist.

7.1 Der Satz von der Begradigung

Zur Erinnerung: Transformiert man die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

mittels eines Diffeomorphismus $y = \Psi(x)$, dann gilt (nach der Kettenregel) für y die Differentialgleichung

$$\dot{y} = D\Psi(x)\dot{x} = D\Psi(\Psi^{-1}(y)) \cdot f(\Psi^{-1}(y)).$$

Ziel wird es nun sein, dass die Gleichung für y möglichst "einfach" wird. Falls $f(x_0) \neq 0$ ist, dann lässt sich die Differentialgleichung so transformieren, dass das Vektorfeld in einer Umgebung von x_0 konstant ist. Die Trajektorien sind dann parallele Geraden:

Satz 7.1 (Satz von der Begradigung, flow box theorem) Sei $U \subseteq X = \mathbb{R}^n$ und $f : U \rightarrow X$ ein C^k -Vektorfeld, $k \geq 1$ und $x_0 \in U$ ein Punkt mit $f(x_0) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung V von x_0 , eine Umgebung W von $0 \in \mathbb{R}^n$ und ein C^k -Diffeomorphismus $\Psi : V \rightarrow W$, so dass für das transformierte Vektorfeld gilt:

$$\tilde{f}(y) = D\Psi(\Psi^{-1}(y))f(\Psi^{-1}(y)) = f(x_0) \quad \forall y \in W.$$

Beweis: Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $x_0 = 0$ und $f(x_0) = (1, 0, \dots, 0)$ ist. Das erreichen wir schon mit einer affinen Koordinatentransformation. Sei Φ_t der Fluss zur Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$. Wir betrachten einen **transversalen Schnitt**

$$S := \langle (1, 0, \dots, 0) \rangle^\perp = \{(0, y_1, \dots, y_{n-1})\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

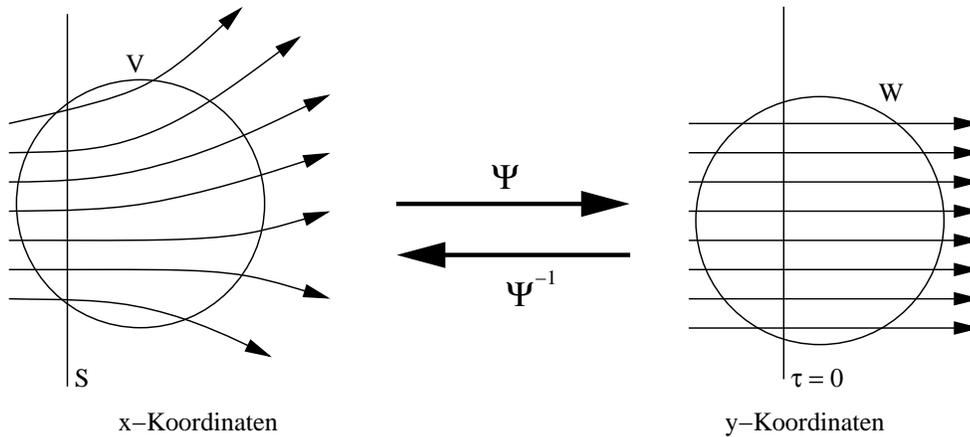


Abbildung 6: Satz von der Begradigung

Für $\xi = (\tau, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ setzen wir ganz explizit

$$\Psi^{-1}(\xi) = \Phi_\tau(0, y_1, \dots, y_{n-1}).$$

setzen.

1. Behauptung: Ψ ist tatsächlich ein lokaler Diffeomorphismus.

Zunächst ist $\Psi \in C^1$ wegen Korollar 3.13 (“Von der Differentialgleichung zum Fluss”).

Die Jacobi-Matrix der Umkehrabbildung

$$D_{(\tau,y)}\Psi^{-1}(\tau = 0, y = 0) = \left(\begin{array}{c|ccc} f_1(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_2(x_0) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ f_3(x_0) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_0) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

ist nicht-singulär, also ist Ψ nach dem Satz über inverse Funktionen lokal invertierbar.

2. Behauptung: Ψ transformiert $\dot{x} = f(x)$ auf $\dot{y} = (1, 0, \dots, 0)$.

Ψ transformiert den Fluss Φ_t nach $\tilde{\Phi}_t$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_t(\xi) &= \Psi(\Phi_t(\Psi^{-1}(\xi))) \\ &= \Psi(\Phi_t(\Phi_\tau(\xi))) \\ &= \Psi(\Phi_{t+\tau}(\xi)) \\ &= (t + \tau, y). \end{aligned}$$

Die zugehörige Differentialgleichung lautet dann

$$\begin{cases} \dot{\tau} &= 1 \\ \dot{y} &= 0. \end{cases}$$

7.2 Der Satz von Grobman-Hartman

Da wir nun schon so viel über lineare Differentialgleichungen wissen, ist es von Interesse, welche Vektorfelder in der Nähe eines Gleichgewichts so aussehen, wie ein lineares Vektorfeld. Etwas präziser: welche Vektorfelder sind C^0 - oder C^k -konjugiert zu einem linearen Vektorfeld. Bevor wir uns aber nichtlinearen Gleichungen zuwenden, wollen wir erst noch einmal den linearen Fall betrachten:

Definition: Eine $n \times n$ -Matrix A heißt **hyperbolisch**, falls kein Eigenwert von A auf der imaginären Achse liegt:

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset.$$

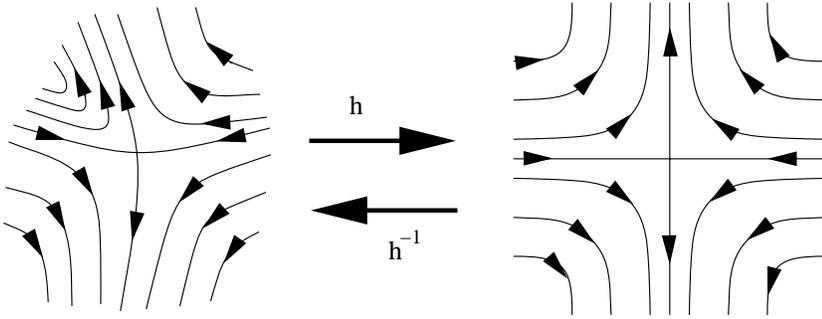


Abbildung 7: Zum Satz von Grobman-Hartman

Der Raum \mathbb{R}^n zerfällt dann in zwei invariante Unterräume:

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u, \quad AE^s = E^s, \quad AE^u = E^u.$$

Diese Unterräume heißen **stabiler** und **instabiler Unterraum**.

Ein Gleichgewicht x_0 einer Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ heißt **hyperbolisch**, falls die Linearisierung $Df(x_0)$ keine Eigenwerte auf der imaginären Achse besitzt.

Satz 7.2 (Grobman-Hartman, Differentialgleichung/Fluss) Sei $x = 0$ ein hyperbolisches Gleichgewicht von

$$\dot{x} = f(x),$$

d.h. $f(0) = 0$ und $\operatorname{Re} \sigma(Df(0)) \neq 0$. Dann ist der zugehörige Fluss Φ_t lokal C^0 -konjugiert zum Fluss der Linearisierung

$$\dot{x} = Df(0)x =: Ax$$

von f in $x = 0$, das heißt es existiert ein lokaler Homöomorphismus h mit

$$e^{At} \circ h = h \circ \Phi_t.$$

Ein ganz analoger Satz gilt auch für Abbildungen.

Satz 7.3 (Grobman-Hartman, Abbildungen) Sei $x = 0$ ein hyperbolischer Fixpunkt einer differenzierbaren Abbildung F d.h. $F(0) = 0$ und $\operatorname{Re} \sigma(DF(0)) \neq 0$. Dann ist F lokal C^0 -konjugiert zur Linearisierung

$$x_{n+1} = DF(0)x_n$$

von F in $x = 0$, das heißt es existiert ein lokaler Homöomorphismus h mit

$$DF(0) \circ h = h \circ F.$$

Der Beweis dieser Sätze ist aber relativ aufwändig und entspricht nicht ganz seiner doch eher begrenzten Bedeutung. Aus diesem Grund verweisen für den Beweis auf die Bücher von [Hartman] oder [Palis & de Melo].

Wie wir unten sehen werden, ist es in der Praxis nützlicher, wenn man es schafft, ein hyperbolisches Gleichgewicht mit einer glatten Transformation zu linearisieren.

Satz 7.4 (C^1 -Linearisierung) Betrachte wieder

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in C^2$$

mit $f(0) = 0$ und nimm an, dass die Realteile der Linearisierung $Df(0)$ im Gleichgewicht $x = 0$ in der Vereinigung der Intervalle $[-a_L, -a_R] \cup [b_L, b_R]$ enthalten sind. Dabei sei natürlich $-a_R < 0 < b_L$. Weiter sollen reelle Zahlen $0 < \mu < 1$ und $0 < \nu < 1$ existieren, so dass

$$a_L - a_R < \mu b_L, \quad b_R - b_L < \nu a_R.$$

Dann ist f lokal C^1 -konjugiert zur Linearisierung

$$\dot{x} = Df(0)x$$

von f in $x = 0$, d.h. es gibt einen lokalen Diffeomorphismus h mit

$$e^{At} \circ h = h \circ \Phi_t.$$

Unter gewissen Bedingungen kann man sogar eine unendlich oft differenzierbare Transformation finden.

Satz 7.5 (C^∞ -Linearisierung, Satz von Sternberg) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $x = 0$ ein hyperbolisches Gleichgewicht von

$$\dot{x} = f(x),$$

d.h. $f(0) = 0$ und $\operatorname{Re} \sigma(Df(0)) \neq 0$. Falls die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ die **Nichtresonanzbedingung**

$$\lambda_i \neq m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n$$

für jedes n -Tupel ganzer Zahlen mit $2 \leq \sum_i m_i$ erfüllen, Dann ist f lokal C^∞ -konjugiert zur Linearisierung

$$\dot{x} = Df(0)x$$

von f in $x = 0$.

Beispiel/Ausblick: Homokline Verzweigung

Eine typische Anwendung für Linearisierungssätze sind homokline Verzweigungen, von denen wir hier den einfachsten Fall kurz skizzieren. Ausführlicher besprechen wir homokline Verzweigungen im nächsten Semester. Sei

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^2$$

eine Differentialgleichung, die von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängt. Es sei außerdem $f(0, \lambda) = 0$ für alle λ , d.h. $x = 0$ ist immer eine Ruhelage. Für $\lambda = 0$ existiere ein homokliner Orbit γ , also eine Lösung, die für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen $x = 0$ konvergiert, siehe Abbildung 8. Die Eigenwerte der Linearisierung $D_x f(0, 0)$ seien $-\mu_- < 0 < \mu_+$ mit Eigenvektoren $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$. Wir wollen periodische Lösungen für Werte von λ nahe $\lambda = 0$ finden. Dazu führen wir zwei **transversale Schnitte**

$$\Sigma_{in} := \{x_1 = \rho, |x_2| \leq \rho\} \quad \text{und} \quad \Sigma_{out} := \{|x_1| \leq \rho, x_2 = \rho\}$$

ein und verfolgen, wie Trajektorien von Σ_{in} nach Σ_{out} gelangen, bzw. umgekehrt. Die Abbildung $\Pi_{loc} : \Sigma_{in} \rightarrow \Sigma_{out}$ ordnet dann jedem Punkt $(\rho, x_2) \in \Sigma_{in}$ mit $x_2 > 0$ den Schnittpunkt der Trajektorie durch (ρ, x_2) mit Σ_{out} zu. Entsprechend bildet die globale Rückkehrabbildung Π_{glob} jeden Punkt (x_1, ρ) auf den nächsten Schnittpunkt der Trajektorie durch diesen Punkt mit Σ_{in} ab.

Wir machen dabei die folgenden Annahmen:

1. Die Eigenwerte der Linearisierung $D_x f(0, \lambda)$ seien $-\mu_-(\lambda) < 0 < \mu_+(\lambda)$ mit Eigenvektoren $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$.
2. $\mu_-(0) \neq \mu_+(0)$ (Nichtresonanz-Bedingung)
3. $\Pi_{loc} : \Sigma_{in} \rightarrow \Sigma_{out}$ ist gegeben durch den Fluss der *linearen* Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\mu_-(\lambda)x_1 \\ \dot{x}_2 &= \mu_+(\lambda)x_2 \end{aligned}$$

4. Die globale Abbildung $\Pi_{glob} : \Sigma_{out} \rightarrow \Sigma_{in}$ bildet den Punkt (x_1, ρ) auf den Punkt $(\rho, \pi_{glob}(x_1, \lambda))$ ab mit

$$\pi_{glob}(x_1, \lambda) = \alpha\lambda + \beta x_1 + \mathcal{O}(|x_1| + |\lambda|)^2)$$

mit $\alpha, \beta \neq 0$.

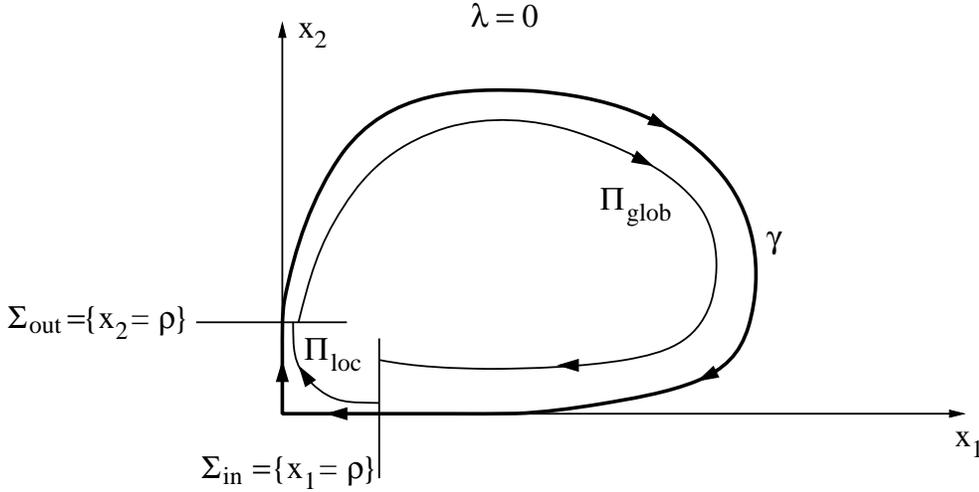


Abbildung 8: Homokline Verzweigung

Periodische Orbits finden wir, indem wir nach Fixpunkten der **Rückkehrabbildung** oder (**Poincaré-Abbildung**)

$$\Pi = \Pi_{glob} \circ \Pi_{loc} : \Sigma_{in} \rightarrow \Sigma_{in}$$

suchen.

Zunächst können wir Π_{loc} ziemlich explizit berechnen:

Die Trajektorie, die im Punkt (ρ, x_2^0) zur Zeit $t = 0$ startet, hat die Form

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \rho e^{-\mu_- t} \\ x_2(t) &= x_2^0 e^{\mu_+ t} \end{aligned}$$

Dabei schreiben wir der besseren Lesbarkeit wegen μ_{\pm} statt $\mu_{\pm}(\lambda)$, solange es noch nicht auf die λ -Abhängigkeit ankommt. Insbesondere erreicht eine Trajektorie mit $x_2^0 > 0$ den Schnitt Σ_{out} zur Zeit

$$t_{loc}(x_2^0) = \frac{1}{\mu_+} \ln \left(\frac{\rho}{x_2^0} \right),$$

und zwar im Punkt $(\pi_{loc}(x_2^0, \lambda), \rho)$ mit

$$\pi_{loc}(x_2^0, \lambda) = \underbrace{\rho^{1-\mu_-/\mu_+}}_{=: C} (x_2^0)^{\frac{\mu_-}{\mu_+}}.$$

Trajektorien mit $x_2^0 \leq 0$ erreichen hingegen Σ_{out} nicht, sondern verlassen eine Umgebung von $x = 0$ in der entgegengesetzten Richtung wie der homokline Orbit γ . Ein wichtiger Punkt ist hierbei: Die Abbildung π_{loc} ergibt auch einen Sinn für $x_2^0 = 0$, obwohl der Punkt $(\rho, 0)$ unter Π_{loc} **nicht** nach Σ_{out} gelangt. Trotzdem wird gerade $x_2^0 = 0$ der Punkt sein, an dem wir mit dem Satz über implizite Funktionen ansetzen werden.

Unter Π_{glob} wird der Punkt $(C(x_2^0)^{\frac{\mu_-}{\mu_+}}, \rho)$ dann auf den Punkt $(\rho, \pi_{glob}(C(x_2^0)^{\frac{\mu_-}{\mu_+}}, \lambda))$ mit

$$\pi_{glob}(C(x_2^0)^{\frac{\mu_-}{\mu_+}}, \lambda) = \alpha\lambda + \beta C(x_2^0)^{\frac{\mu_-}{\mu_+}} + \mathcal{O}((|x_2^0|^{\frac{\mu_-}{\mu_+}} + |\lambda|)^2)$$

abgebildet. Fixpunkte von $\Pi_{glob} \circ \Pi_{loc}$ entsprechen nun Fixpunkten von $\pi_{glob} \circ \pi_{loc}$. Um diese zu finden, müssen wir die **Verzweigungsgleichung**

$$x_2^0 = \alpha\lambda + \beta C(x_2^0)^{\frac{\mu_-}{\mu_+}} + \mathcal{O}((|x_2^0|^{\frac{\mu_-}{\mu_+}} + |\lambda|)^2)$$

lösen. Dazu setzen wir

$$\mathcal{F}(y, \lambda) := y - \alpha\lambda - \beta C y^{\frac{\mu_-}{\mu_+}} + \mathcal{O}((|y|^{\frac{\mu_-}{\mu_+}} + |\lambda|)^2).$$

Eine Lösung $y = \lambda = 0$ kennen wir bereits, einen Lösungsweig $y = y(\lambda)$ erhalten wir mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, da wir $\frac{\mu_-}{\mu_+} \neq 1$ vorausgesetzt hatten. Dabei sind allerdings verschiedene Fälle zu unterscheiden, die wir hier nicht im Detail ausführen. Sei beispielsweise $\mu_- > \mu_+$. Dann ist

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}(0, 0) = 1 - \beta C \frac{\mu_-}{\mu_+} y^{\frac{\mu_-}{\mu_+} - 1} + \mathcal{O}(|y|^{\frac{\mu_-}{\mu_+}} + |\lambda|^2) \Big|_{y=\lambda=0} = 1.$$

Es existiert also lokal ein eindeutiger Lösungsweig $y_{per} = y_{per}(\lambda)$. Die Ableitung $y'_{per}(\lambda)$ in $\lambda = 0$ ist

$$y'_{per}(0) = - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}(0, 0) \right) / \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}(0, 0) \right) = \alpha.$$

Wir müssen uns nun erinnern, dass nur die Punkte, die in Σ_{in} mit positiver x_2 -Koordinate starten, überhaupt den transversalen Schnitt Σ_{out} erreichen. Falls $\alpha > 0$ ist, dann erhalten wir damit für alle $\lambda > 0$ eine Anfangsbedingung $(\rho, y_{per}(\lambda))$, die zu einem periodischen Orbit in der Nähe von γ gehört. Für $\lambda < 0$ nahe $\lambda = 0$ gibt es dagegen keine periodischen Orbits. Wenn man die übrigen Fälle analog untersucht, gelangt man schließlich zu dem folgenden

“Satz”: *Unter einigen generischen Annahmen gilt: Wenn*

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^2$$

mit $f(0, \lambda) = 0$ für $\lambda = 0$ einen homoklinen Orbit γ an das Gleichgewicht $x = 0$ besitzt, dann existiert für alle hinreichend kleinen $\lambda > 0$ genau ein periodischer Orbit in einer kleinen Umgebung von γ und für alle $\lambda < 0$ nahe 0 existiert kein periodischer Orbit in der Nähe von γ oder umgekehrt.

Bemerkung: Wo benötigt man, dass das Vektorfeld in der Nähe von $x = 0$ tatsächlich C^1 -linearisierbar ist ?

Antwort: In unserem Beweis gar nicht. Allerdings ist die Voraussetzung 1 normalerweise nicht automatisch erfüllt, denn die ursprüngliche Gleichung ist nichtlinear nahe $x = 0$. In diesem Fall setzt sich Π_{glob} zusammen aus der globalen Rückkehrabbildung in den ursprünglichen Koordinaten und der Transformation auf die einfachen Koordinaten nahe 0. Eine (Taylor-)Entwicklung von Π_{glob} können wir deshalb nur hinschreiben, wenn alles (auch die Koordinatentransformation) glatt genug ist.

7.3 Stabile und instabile Mannigfaltigkeit

Manchmal ist man gar nicht so sehr daran interessiert, den Fluss durch eine Koordinatentransformation zu linearisieren, sondern möchte nur diejenigen Lösungen in der Nähe einer Ruhelage beschreiben, die für $t \rightarrow \infty$ gegen dieses Gleichgewicht konvergieren. Wir wissen schon, dass *alle* Lösungen gegen das Gleichgewicht konvergieren, falls die Linearisierung im Gleichgewicht nur Eigenwerte mit echt negativem Realteil besitzt. Falls diese Bedingung nicht erfüllt ist, dann konvergieren normalerweise die meisten Trajektorien nicht gegen das Gleichgewicht. Diejenigen Trajektorien, die für $t \rightarrow \infty$ gegen $x = 0$ konvergieren liegen in einem linearen Unterraum, dem verallgemeinerten Eigenraum zu den Eigenwerten mit negativem Realteil. Der folgende Satz besagt, dass sich dieses Bild für nichtlineare Gleichungen nur “verbiegt”, aber nicht entscheidend ändert: Statt linearer Unterräume existieren nun Mannigfaltigkeiten, die alle Lösungen enthalten, die für $t \rightarrow \infty$ gegen $x = 0$ konvergieren.

Satz 7.6 (Stabile Mannigfaltigkeit, lokal) *Betrachte die autonome Differentialgleichung*

$$\dot{x} = f(x)$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $f(0) = 0$. Die Linearisierung $A := Df(0)$ sei hyperbolisch, habe also keine Eigenwerte auf der imaginären Achse. Sei wie oben $\sigma^s := \sigma(A) \cap \{\operatorname{Re} z < 0\}$ und $\sigma^u := \sigma(A) \cap \{\operatorname{Re} z > 0\}$ und E^s, E^u seien die stabilen bzw. instabilen Eigenräume von A .

*Dann existiert eine Umgebung U von $x = 0$ in E^s und eine Funktion $\Psi \in C^1(U, E^u)$, so dass die **lokale stabile Mannigfaltigkeit***

$$W_{loc}^s(0) := \operatorname{graph}(\Psi) = \{(x^s, x^u); x^u = \Psi(x^s)\}$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $W_{loc}^s(0)$ ist positiv invariant, d.h. $x_0 \in W_{loc}^s(0) \Rightarrow \Phi_t(x_0) \in W_{loc}^s(0)$ für alle $t \geq 0$.
Es existieren sogar Konstanten $K, \eta > 0$, so dass

$$|\Phi_t(x_0)| \leq K e^{-\eta t} |x_0|$$

für $x_0 \in W_{loc}^s(0)$. (ii) Umgekehrt ist jede Lösung, die für alle Zeiten $t \geq 0$ in einer kleinen Umgebung von $x = 0$ bleibt, in $W_{loc}^s(0)$ enthalten.

Der Beweis zerfällt in mehrere Schritte. Zunächst werden wir W_{loc}^s , bzw. die Abbildung Ψ konstruieren und erst anschließend nachweisen, dass alle Eigenschaften erfüllt sind. Für die Konstruktion modifizieren wir zunächst das Vektorfeld, so dass es außerhalb einer Umgebung von $x = 0$ linear ist. Dann schreiben wir die Differentialgleichung als Integralgleichung und benutzen schließlich den Banachschen Fixpunktsatz.

Notation: Wir zerlegen wieder $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ und bezeichnen mit $P : E^s \oplus E^u \rightarrow E^s$ die Projektion auf den stabilen Unterraum E^s . Analog sei $Q := (\text{Id} - P) : E^s \oplus E^u \rightarrow E^u$ die Projektion auf den instabilen Unterraum. Für $x \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $x^s := Px$ und $x^u := Qx$.

Insbesondere gibt es wegen der Hyperbolizität von A Konstanten $C, \delta > 0$, so dass die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|e^{At}P\| &\leq C e^{-\delta t} \quad \text{für } t \geq 0, \\ \|e^{At}Q\| &\leq C e^{\delta t} \quad \text{für } t \leq 0 \end{aligned}$$

gelten. Als Norm wählt man auf der linken Seite irgendeine der (äquivalenten) Matrix-Normen, beispielsweise $\|A\| = \max |a_{ij}|$.

Man stellt sich dann A am besten wieder in Jordan-Normalform vor. Dann hat A Blockdiagonalgestalt (jeweils ein Block zu $\text{Re } \lambda > 0$ und $\text{Re } \lambda < 0$) und man kann auf jeden der beiden Blöcke die Argumentation aus Korollar 5.7 anwenden.

Mit $g(x) := f(x) - Ax$ bezeichnen wir den nichtlinearen Anteil von f . Wir betrachten von nun an also die Gleichung

$$\dot{x} = Ax + g(x). \quad (16)$$

Angenommen wir haben eine Lösung $x(t)$ gefunden, die für alle $t \geq 0$ beschränkt ist, dann gilt nach der Variation-der-Konstanten-Formel

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}g(x(\tau)) \, d\tau.$$

Mit Hilfe der Projektionen P und $Q = \text{Id} - P$ zerlegen wir diese Gleichung in das äquivalente System

$$\begin{aligned} x^s(t) = Px(t) &= e^{At}Px(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Pg(x(\tau)) \, d\tau \\ x^u(t) = Qx(t) &= e^{At}Qx(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Qg(x(\tau)) \, d\tau. \end{aligned}$$

Für beschränkte Lösungen können wir diese Gleichungen noch etwas vereinfachen:

Lemma: Falls $x(t)$ eine Lösung von (16) ist, die für $t \geq 0$ beschränkt bleibt, dann erfüllt $x(t) = (x^s(t), x^u(t))$ die Integralgleichung

$$\begin{aligned} x^s(t) &= e^{At}Px(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Pg(x(\tau)) \, d\tau \\ x^u(t) &= - \int_t^\infty e^{A(t-\tau)}Qg(x(\tau)) \, d\tau. \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt: Falls $(x^s(t), x^u(t))$ eine beschränkte Lösung dieser Integralgleichung sind, dann ist $x(t)$ eine beschränkte Lösung von (16) für alle $t \geq 0$.

Beweis des Lemmas: Für festes $t \geq 0$ und beliebiges $T > t$ gilt:

$$x^u(t) = e^{A(t-T)}x^u(T) + \int_T^t e^{A(t-\tau)}Qg(x(\tau)) \, d\tau.$$

Nun gilt

$$|e^{A(t-T)}x^u(T)| \leq \|e^{A(t-T)}\| \|x^u(T)\| \leq Ce^{-\delta(t-T)}|x^u(T)|.$$

Für $T \rightarrow +\infty$ strebt dieser Term gegen 0, da ja x^u beschränkt ist. Der zweite Term strebt gegen $\int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)}Qg(x(\tau)) \, d\tau$. Dieses uneigentliche Integral ist absolut konvergent, da

$$|e^{A(t-\tau)}Qg(x(\tau))| \leq \|e^{A(t-\tau)}Q\| |g(x(\tau))| \leq Ce^{\delta(t-\tau)}|g(x(\tau))| \text{ für } \tau \geq t.$$

Umgekehrt rechnet man durch Differenzieren nach, dass jede Lösung der Integralgleichung eine Lösung von (16) liefert. \square

Beweis des Satzes über die stabile Mannigfaltigkeit:

Da wir uns nur für Lösungen in einer kleinen Umgebung von $x = 0$ interessieren, können wir $\|g\|_{BC^0}$ und die Lipschitz-Konstante von g beliebig klein machen, indem wir g durch $g(x) \cdot \chi(|x|)$ ersetzen mit einer Abschneidefunktion $\chi \in C^k$ für die gilt:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq r, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 2r \end{cases}$$

sowie $|\nabla\chi| \leq 2/r$.

Durch Wahl von r können wir dann erreichen, dass für die Lipschitz-Konstante von g gilt:

$$\text{Lip}(g) < \frac{\delta}{4C}.$$

Wir definieren nun eine Abbildung

$$T(x^s, x^u) := \begin{pmatrix} e^{At}x_0^s + \int_0^t e^{A(t-s)}Pg(x^s(\tau) + x^u(\tau)) \, d\tau \\ - \int_t^\infty e^{A(t-s)}Qg(x^s(\tau) + x^u(\tau)) \, d\tau \end{pmatrix}$$

durch die rechte Seite der Integralgleichung aus dem obigen Lemma mit festem x_0^s . Fixpunkte von T sind dann Lösungen der Integralgleichung.

Zeige:

$$T : BC^0(\mathbb{R}^+, E^s \times E^u) \longrightarrow BC^0(\mathbb{R}^+, E^s \times E^u)$$

ist eine Kontraktion.

Behauptung: T bildet tatsächlich $BC^0(\mathbb{R}^+, E^s \times E^u)$ in sich ab:

Betrachte zunächst die x^s -Komponente:

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq 0} \left| e^{At}Px(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Pg(x(\tau)) \, d\tau \right| \\ & \leq \sup_{t \geq 0} Ce^{-\delta t}|x_0| + \sup_{t \geq 0} \int_0^t Ce^{-\delta(t-\tau)}|g(x(\tau))| \, d\tau \\ & \leq C\|x\|_{BC^0} + \frac{C}{\delta} \text{Lip}(g)\|x\|_{BC^0}. \end{aligned}$$

x^u -Komponente:

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq 0} \left| - \int_t^\infty e^{A(t-\tau)}Qg(x(\tau)) \, d\tau \right| \\ & \leq \sup_{t \geq 0} \int_0^t Ce^{\delta(t-\tau)}|g(x(\tau))| \, ds \\ & \leq \frac{C}{\delta} \text{Lip}(g)\|x\|_{BC^0}. \end{aligned}$$

Behauptung: T ist eine Kontraktion mit Kontraktionsrate $1/2$ unabhängig von x_0^s :

Seien dazu $x_1 = (x_1^s, x_1^u), x_2 = (x_2^s, x_2^u) \in BC^0(\mathbb{R}^+, E^s \times E^u)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|PT(x_1^s, x_1^u) - PT(x_2^s, x_2^u)\|_{BC^0} &= \sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t e^{A(t-\tau)} P(g(x_1(\tau)) - g(x_2(\tau))) d\tau \right| \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \int_0^t C e^{-\delta(t-\tau)} \text{Lip}(g) |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{C}{\delta} \text{Lip}(g) \|x_1 - x_2\|_{BC^0} \\ &\leq \frac{1}{4} \|x_1 - x_2\|_{BC^0}. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|QT(x_1^s, x_1^u) - QT(x_2^s, x_2^u)\|_{BC^0} &= \sup_{t \geq 0} \left| \int_t^\infty e^{A(t-\tau)} Q(g(x_1(\tau)) - g(x_2(\tau))) d\tau \right| \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \int_t^\infty C e^{-\delta(t-\tau)} \text{Lip}(g) |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{C}{\delta} \text{Lip}(g) \|x_1 - x_2\|_{BC^0} \\ &\leq \frac{1}{4} \|x_1 - x_2\|_{BC^0}. \end{aligned}$$

Insgesamt ist dann

$$\|T(x_1) - T(x_2)\|_{BC^0} \leq \|PT(x_1) - PT(x_2)\|_{BC^0} + \|QT(x_1) - QT(x_2)\|_{BC^0} \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_{BC^0}.$$

Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt nun direkt, dass T einen Fixpunkt besitzt. Diesen Fixpunkt nennen wir $(x_*^s, x_*^u)(t, x_0^s)$. Aus der Konstruktion folgt sofort, dass $x_*^s(0, x_0^s) = x_0^s$. Nun können wir Ψ definieren als

$$\Psi(x_0^s) := x_*^u(0, x_0^s).$$

Ψ ist so glatt wie f , da der Fixpunkt beim Banachschen Fixpunktsatz so glatt von Parametern (hier x_0^s) abhängt wie die die Kontraktion T selbst. Beweise dazu finden sich beispielsweise in den Büchern von [Deimling] oder [Chow & Hale].

Graph (Ψ) ist positiv invariant, da der Fixpunkt eindeutig ist. Betrachte dazu einen Punkt $x_0 := (x_0^s, \Psi(x_0^s)) \in \text{Graph}(\Psi)$ und eine Zeit $t_0 > 0$. Zerlege $\Phi_{t_0}(x_0) = (\tilde{x}^s, \tilde{x}^u)$. Dann bleibt der Vorwärtsorbit von $(\tilde{x}^s, \tilde{x}^u)$ beschränkt. $\Psi(\tilde{x}^s)$ ist aber der *eindeutige* Punkt in E^u , so dass der Vorwärtsorbit durch $(\tilde{x}^s, \Psi(\tilde{x}^s))$ beschränkt bleibt. Also ist $\tilde{x}^u = \Psi(\tilde{x}^s)$, und damit $\Phi_{t_0}(x_0) \in \text{Graph}(\Psi)$.

Um zu zeigen, dass Lösungen in $W_{loc}^s(0)$ exponentiell schnell gegen 0 konvergieren, bedient man sich eines Tricks: Man definiert für $\eta > 0$

$$BC_\eta^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n) := \{x \in BC^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n); \|x\|_{BC_\eta^0} := \sup_{t \geq 0} |x(t)e^{\eta t}| < \infty\}$$

den Banachraum der stetigen Funktionen, die mindestens mit der Rate η exponentiell abfallen und zeigt, dass T eine Kontraktion auf $BC_\eta^0(\mathbb{R}^+, E^s \times E^u)$ ist, falls $\eta < \delta$. Das geht völlig analog zum obigen Beweis für $BC^0(\mathbb{R}^+, E^s \times E^u)$. In diesem Fall muss man nur alle Terme $e^{-\delta t}$ durch $e^{-(\delta-\eta)t}$ ersetzen, etc. Eine Lösung in BC_η^0 liefert dann automatisch ein exponentiell abklingendes $x^s(t)$. \square

Analog zeigt man die Existenz einer **lokalen instabilen Mannigfaltigkeit** $W_{loc}^u(0)$, die alle Lösungen enthält, die für $t \leq 0$ gegen $x = 0$ konvergieren.

Bemerkungen:

1. Man kann die Mannigfaltigkeiten $W_{loc}^s(0)$ und $W_{loc}^u(0)$ zu globalen **invarianten Mannigfaltigkeiten** fortsetzen durch den Fluss:

$$\begin{aligned} W^s(0) &= \bigcup_{t \leq 0} \Phi_t(W_{loc}^s(0)) \\ W^u(0) &= \bigcup_{t \geq 0} \Phi_t(W_{loc}^u(0)). \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} W^s(0) &= \{x_0 \in \mathbb{R}^n; \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x_0) = 0\}, \\ W^u(0) &= \{x_0 \in \mathbb{R}^n; \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(x_0) = 0\}. \end{aligned}$$

2. $W^s(0)$ ist tangential an den Eigenraum E^s . Um dies zu zeigen, kann man die Invarianz der lokalen stabilen Mannigfaltigkeit ausnutzen und eine Taylor-Entwicklung von Ψ erhalten. Auf diese Weise kann man Ψ auch näherungsweise bestimmen.

3. Auch wenn das Spektrum Eigenwerte auf der imaginären Achse besitzt, kann man eine ähnliche Konstruktion durchführen. Dann erhält man neben der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit noch eine **Zentrumsmannigfaltigkeit**, die (kleine) Lösungen enthält, die für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt sind, also beispielsweise periodische Orbits nahe $x = 0$ (\rightsquigarrow Dynamische Systeme II).

4. Homokline Orbits, d.h. Trajektorien mit $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$ liegen im Schnitt $W^s(0) \cap W^u(0)$. Generell trennen die invarianten Mannigfaltigkeiten oft Bereiche mit qualitativ unterschiedlichem Verhalten.

5. Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten findet man auch für diskrete dynamische Systeme

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

Der entsprechende Satz lautet:

Satz 7.7 (Lokale stabile Mannigfaltigkeit, diskret) Sei $F : \mathbb{R}^m = X \rightarrow X$ ein C^1 -Diffeomorphismus und $x = 0$ ein hyperbolischer Fixpunkt von F , d.h. $F(0) = 0$ und die Jacobi-Matrix $DF(0)$ habe keine Eigenwerte mit Betrag 1. Sei E^s der verallgemeinerte Eigenraum zu den Eigenwerten mit Betrag < 1 und E^u der verallgemeinerte Eigenraum zu den Eigenwerten mit Betrag > 1 . Dann existiert eine positiv invariante lokale stabile Mannigfaltigkeit $W_{loc}^s(0)$, genauer:
Es existiert eine Umgebung U von $x = 0$ in E^s und eine Funktion $\Psi \in C^1(U, E^u)$, so dass

$$W_{loc}^s(0) := \text{graph}(\Psi) = \{(x^s, x^u); x^u = \Psi(x^s)\}$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $W_{loc}^s(0)$ ist positiv invariant und es existieren Konstanten $K > 0$, $0 < \eta < 1$, so dass

$$|F^n(x_0) - K\eta^n x_0|$$

für $x_0 \in W_{loc}^s(0)$. (ii) Umgekehrt enthält $W_{loc}^s(0)$ alle Lösungen, die für alle positiven Zeiten $t \geq 0$ in einer kleinen Umgebung von $x = 0$ bleiben.

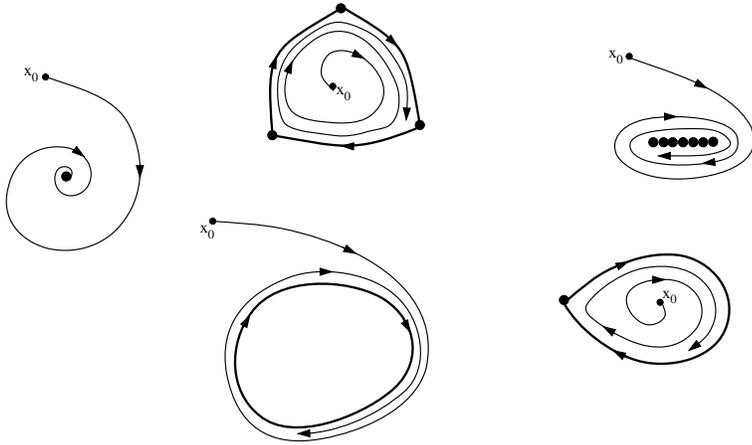
Auch diese lokale stabile Mannigfaltigkeit kann man natürlich zur globalen stabilen Mannigfaltigkeit

$$\begin{aligned} W^s(0) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{-n}(W_{loc}^s(0)) \\ &= \{x_0 \in X; \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x_0) = 0\} \end{aligned}$$

fortsetzen. Analog existiert auch eine *instabile Mannigfaltigkeit*, die alle Punkte enthält, deren Rückwärtsorbit gegen $x = 0$ konvergiert.

8 Ebene Vektorfelder

Für Vektorfelder in der Ebene gelten Sätze, die in höheren Dimensionen $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ nicht mehr wahr sind. Da aber Differentialgleichungen im \mathbb{R}^2 in einigen wichtigen Anwendungen auftreten (nichtlineare Schwingungen, Räuber-Beute-Modelle,...), ist es durchaus gerechtfertigt, sich mit diesem Spezialfall etwas näher zu beschäftigen.

Abbildung 9: Mögliche ω -Limesmengen von ebenen Flüssen

8.1 Der Satz von Poincaré-Bendixson

Das wichtigste Resultat für ebene Vektorfelder ist eine Aussage über die möglichen ω -Limesmengen.

Satz 8.1 (Satz von Poincaré-Bendixson) Sei $\gamma_+(x_0)$ beschränkt. Dann gilt die folgende Alternative: Entweder ist

- (i) $\omega(x_0)$ ein periodischer Orbit oder
- (ii) für jedes $y \in \omega(x_0)$ bestehen $\alpha(y)$ und $\omega(y)$ nur aus Gleichgewichten.

Satz 8.2 (Jordanscher Kurvensatz (o.Bew.)) Sei $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig und injektiv (man nennt Bild(γ) in diesem Fall eine Jordankurve). Dann teilt γ die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bild}(\gamma)$ in genau zwei Zusammenhangskomponenten. Eine dieser Komponenten ist beschränkt und heißt das **Innere** von γ , die andere ist unbeschränkt und heißt **Äußeres** von γ .

Der Beweis dieses Satzes ist überraschend schwierig. Eine Beweisstrategie benutzt *Windungszahlen*, wie man sie aus der Funktionentheorie kennt: Identifiziere \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} und definiere für $z \in \mathbb{C}$ und differenzierbare γ die Windungszahl

$$w(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Zeige dann (mit Cauchys Integralsatz), dass $w(\gamma, z)$ für alle z aus einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bild}(\gamma)$ konstant ist.

Beweis des Satzes von Poincaré-Bendixson:

Strategie: Zeige, dass $\omega(x_0)$ ein periodischer Orbit ist, falls Fall (ii) nicht gilt. Genauer: Wähle $y_0 \in \omega(x_0)$ und setze voraus, dass $\omega(y_0)$ nicht aus lauter Gleichgewichten besteht. Dann ist zu zeigen, dass y_0 auf einem periodischen Orbit $\gamma(y_0)$ liegt und dass $\omega(x_0) = \gamma(y_0)$.

Sei also $z_0 \in \omega(y_0)$ kein Gleichgewicht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0 = (0, 0)$. **Behauptung:** $z_0 \in \omega(x_0)$, denn: $y_0 \in \omega(x_0)$ und wegen der Invarianz von ω -Limesmengen ist der ganze Orbit $\gamma(y_0) \subseteq \omega(x_0)$. Da $\omega(x_0)$ abgeschlossen ist, gilt sogar $\overline{\gamma(y_0)} \subseteq \omega(x_0)$. Insbesondere ist damit $z_0 \in \omega(x_0)$.

Weiter können wir mit dem Satz von der Begradigung (Satz 7.1) annehmen, dass in einer Umgebung von z_0 das Vektorfeld die Form $f(x_1, x_2) = (1, 0)^T$ hat. Ein transversaler Schnitt zum Vektorfeld ist dann $S := \{(x_1, x_2); x_1 = 0, |x_2| \leq \rho\}$.

Da $z_0 \in \omega(x_0)$ muss der Orbit $\gamma_+(x_0)$ die Linie S unendlich oft schneiden. Sei t_n die Folge aller Schnittpunkte $(0, x_2(t_n))$. Wir zeigen nun, dass die Folge $(x_2(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton ist. Ohne Einschränkung sei $0 < x_2(t_2) < x_2(t_1)$. Wir gehen dabei induktiv vor und zeigen, dass dann $x_2(t_3) < x_2(t_2)$. Der Orbit von x_0 zwischen t_1 und t_2 und ein Stück von S schließen ein positiv oder negativ invariantes Gebiet ein. Wir betrachten den Fall eines negativ invarianten Gebietes wie in Abbildung 10. Für alle $t > t_2$ ist $\Phi_t(x_0)$ daher im Äußeren dieses Gebiets. Aus diesem Grund muss auch $x_2(t_3)$ im Äußeren liegen und damit ist $x_2(t_3) < x_2(t_2)$. Im Fall eines positiv invarianten Gebietes argumentiert man ähnlich: dann

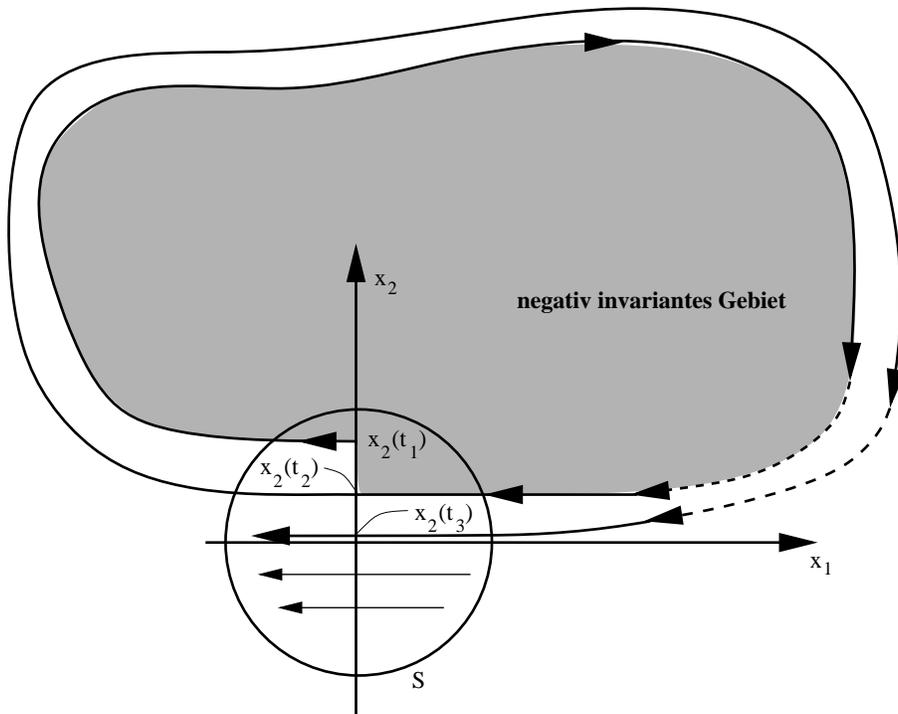


Abbildung 10: Zum Satz von Poincaré-Bendixson

ist $\Phi_t(x_0)$ im Innern des Gebiets für alle $t > t_2$. Die Folge der $x_2(t_n)$ konvergiert gegen 0, da sie als monotone beschränkte Folge einen eindeutigen Grenzwert besitzt und $z_0 \in \omega(x_0)$. Insbesondere ist dann $\omega(x_0) \cap S = \{z_0\}$.

Behauptung: Der Orbit $\gamma(y_0)$ ist periodisch.

Da $z_0 = (0, 0)$ in der ω -Limesmenge von y_0 liegt, schneidet $\gamma_+(y_0)$ den transversalen Schnitt S unendlich oft. Da aber $\gamma(y_0) \subseteq \omega(x_0)$ und $\omega(x_0) \cap S = \{z_0\}$ müssen diese unendlich vielen Schnitte immer derselbe Punkt sein $\leadsto y_0$ liegt auf einem periodischen Orbit.

Behauptung: $\omega(x_0) = \gamma(y_0)$.

Da $\omega(x_0)$ zusammenhängend ist, muss es in jeder Umgebung von $\gamma(y_0)$ Punkte aus $\omega(x_0) \setminus \gamma(y_0)$ geben. Dann müsste aber auch $(\omega(x_0) \setminus \gamma(y_0)) \cap S \neq \emptyset$ sein im Widerspruch zu der oben gezeigten Eigenschaft $\omega(x_0) \cap S = \{z_0\}$. \square

Bemerkung: Der Satz von Poincaré-Bendixson schränkt die möglichen ω -Limesmengen von ebenen Flüssen stark ein, er gibt jedoch keine vollständige Charakterisierung. Es gibt Mengen, die nach dem Satz von Poincaré-Bendixson erlaubt sind und die trotzdem nicht als ω -Limesmengen auftreten. Dazu gehört beispielsweise $\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet$.

8.1.1 Beispiel: Brüsselator

Prigogine und Lefever (aus Brüssel, daher der Name Brüsselator) haben 1968 ein vereinfachtes Modell für die oszillierende chemische Belousov-Zhabotinskii-Reaktion angegeben. Näheres dazu im Buch [Prigogine & Nicolis: Self-Organization in Nonequilibrium Systems, 1977]. Die Gleichungen für die chemischen Konzentrationen x und y lauten:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a - x - bx + x^2y \\ \dot{y} &= bx - x^2y \end{aligned}$$

Dabei sind $a, b > 0$ Parameter.

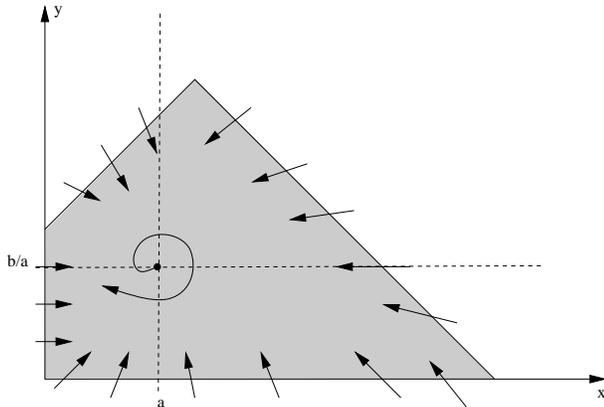


Abbildung 11: Brusselator: Das positiv invariante Gebiet

Satz 8.3 Für $b > a^2 + 1$ existiert ein periodischer Orbit im Gebiet $x > 0, y > 0$.

Beweis: Wir bestimmen zunächst die Ruhelagen.

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow bx - x^2y = 0 \Rightarrow x = a \Rightarrow y = \frac{b}{a}.$$

Linearisierung

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\text{Spur} = b - (a^2 + 1) > 0 \text{ und } \text{Det} = a^2 > 0,$$

nach unserer Klassifikation von Ruhelagen im \mathbb{R}^2 ist $(a, b/a)$ ein instabiler Strudelzentrum der linearisierten Gleichung. Daraus folgt (\rightarrow Prinzip der linearisierten Stabilität), dass $(a, b/a)$ eine instabile Ruhelage ist. Wir werden nun noch ein positiv invariantes Gebiet finden, das nur diese Ruhelage enthält.

Dann sind wir fertig, denn: für eine beliebige Anfangsbedingung (x_0, y_0) in diesem Gebiet kann die ω -Limesmenge das einzige, instabile Gleichgewicht nicht enthalten. Es tritt also Fall (i) aus dem Satz von Poincaré-Bendixson ein und die ω -Limesmenge ist ein periodischer Orbit. Insbesondere existiert also ein solcher periodischer Orbit.

Um das positiv invariante Gebiet zu konstruieren gehen wir in zwei Schritten vor: Zunächst ist

$$P := \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0\}$$

positiv invariant. Auf der x -Achse ist $\dot{y} > 0$, sobald $x > 0$ ist. Auf der y -Achse ist $\dot{x} = a > 0$ überall. Auch die Trajektorie durch $x = y = 0$ läuft ins Innere von P , denn sonst müssten auch alle Trajektorien mit einem Startwert nahe $x = y = 0$ das Gebiet P verlassen (wegen der stetigen Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen). Also ist P positiv invariant.

Betrachte nun noch zwei Geradenscharen

$$\begin{aligned} \ell_1 : x + y &= c_1 \\ \ell_2 : y - x &= c_2 \end{aligned}$$

mit Parametern $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Es gilt

$$\frac{d}{dt}x(t) + y(t) = a - x(t) < 0 \text{ falls } x(t) > a,$$

für $x(t) > a$ kreuzen die Trajektorien Geraden dieser Form in Richtung kleinerer Werte von c_1 . analog kreuzen wegen

$$\frac{d}{dt}y(t) - x(t) = -a + x(t) + 2bx(t) - 2x(t)^2y(t)$$

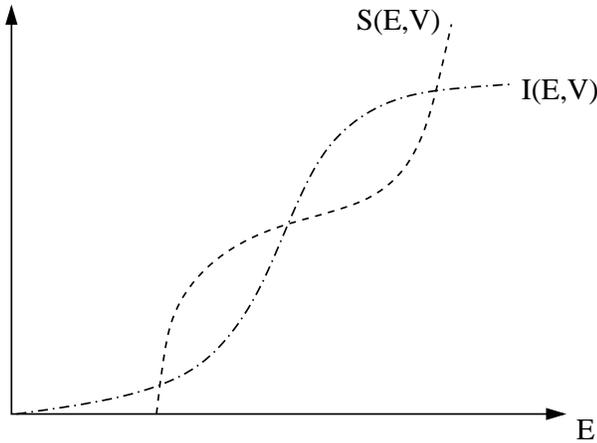


Abbildung 12: Kaldors Konjunkturmodell

für $y(t) \gg x(t)$ die Orbits die Geradenschar in Richtung kleinerer Werte von c_2 . Ein kompaktes positiv invariantes Gebiet erhält man also, indem man die Region betrachtet, die von $x = 0, y = 0, \{x + y = c_1\}$ und $\{y - x = c_2\}$ mit hinreichend großem c_1 und c_2 eingeschlossen wird (siehe Abbildung 11). \square

8.1.2 Beispiel: Kaldors Konjunkturzyklus

Eines der ältesten nichtlinearen Modelle in der Volkswirtschaftslehre stammt von Kaldor (1940), der damit die immer wiederkehrenden konjunkturellen Schwankungen zu erklären versuchte. Sein Ansatz ist insofern bemerkenswert, als Kaldors Modell eines der ersten *nichtlinearen* Modelle in den Wirtschaftswissenschaften war und er periodisches Verhalten aus dem System heraus, d.h. ohne Einwirkung von äußeren Schocks oder Anregungen zu erklären versuchte.

Kaldor betrachtet die Sparrate S und die Investitionsrate I jeweils abhängig vom Einkommen E . Dabei ist der Graph $I = I(E)$ eine S -förmige Kurve, während $S(E)$ wie in Abbildung 13 aussieht. Weiter hängen I und S vom Vermögen V ab. Während Kaldor rein geometrisch anhand der Graphen argumentierte, um die Existenz einer periodischen Lösung plausible zu machen, betrachten Chang und Smyth die zugehörige Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \alpha(I(E, V) - S(E, V)) \\ \dot{V} &= I(E, V) \end{aligned}$$

Dabei werden die folgenden Annahmen gemacht:

(H1) I und S sind monoton wachsende Funktionen von E , d.h. mehr Einkommen führt sowohl zu vermehrter Investition als auch zu größerem Sparen.

(H2) $\frac{\partial I}{\partial E}$ ist von der Form wie in Abbildung 12. Kleine Einkommen E gibt es meist in Zeiten von Überangebot, in denen Investitionen nicht lohnend sind, da zunächst jede größere Nachfrage schon aus diesem Überangebot bedient werden kann. Für große Einkommen E geht die Investitionsrate ebenfalls zurück, da alle profitablen Investitionen bereits getätigt sind und ein Sättigungseffekt eintritt.

(H3) $\frac{\partial S}{\partial E}$ ist Kleine Einkommen E können überhaupt nicht sparen. Ab einem gewissen E wird Sparen möglich und zwar mit einer anfangs sehr hohen Rate (aus Vorsicht wird relativ viel des übrigen Geldes zurückgelegt). Die Sparrate steigt auch bei hohen Einkommen wieder an, wenn alle Bedürfnisse gestillt sind.

Zur Plausibilität dieser Annahmen, siehe [Gabisch & Lorenz: Business Cycle Theory. Seite 109 ff.]

Satz 8.4 (Chang & Smyth 1971) *Das System*

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \alpha(I(E, V) - S(E, V)) \\ \dot{V} &= I(E, V) \end{aligned}$$

erfülle die Voraussetzungen

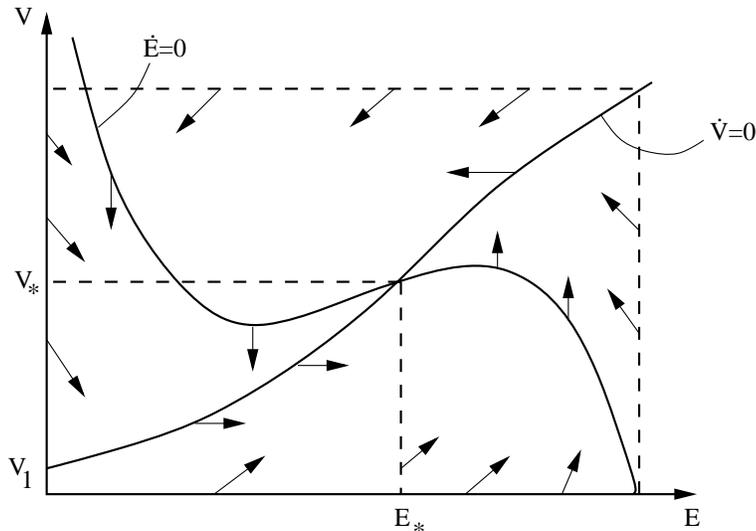


Abbildung 13: Die invariante Region in Kaldors Modell

(i) $I(E, V) > 0 \quad \forall E \geq 0$

(ii) $\frac{\partial I}{\partial V} < \frac{\partial S}{\partial V} < 0$ und $\frac{\partial I}{\partial E}, \frac{\partial S}{\partial E} > 0$,

(iii) im Gleichgewicht (E_*, V_*) gilt

$$\alpha \left(\frac{\partial I}{\partial E} - \frac{\partial S}{\partial E} \right) + \frac{\partial I}{\partial V} > 0$$

und $\frac{\partial I}{\partial V} \cdot \frac{\partial S}{\partial E} < \frac{\partial I}{\partial E} \cdot \frac{\partial S}{\partial V}$.

(iv) Die Kurve $\{\dot{V} = 0\}$ schneidet die V -Achse bei $V_1 > 0$

(v) Die Kurve $\{\dot{E} = 0\}$ schneidet die E -Achse bei $E_1 > E_*$ und es gilt $\lim_{E \rightarrow 0} V = \infty$ längs dieser Kurve.

Dann existiert ein periodischer Orbit.

Beweisskizze: Der Beweis ist eine direkte Anwendung des Satzes von Poincaré-Bendixson ähnlich wie im vorigen Beispiel. Sei dazu V_1 so gewählt, dass $\dot{V} = 0 = I(E_1, V_1)$. Dann ist das Gebiet

$$D := \{(E, V); 0 \leq E \leq E_1, 0 \leq V \leq V_1\}$$

kompakt, positiv invariant und das einzige in D enthaltene Gleichgewicht ist wegen (iii) instabil. \square

Bemerkung: Natürlich hat man viel darüber nachgedacht, welche Verallgemeinerungen des Satzes von Poincaré-Bendixson gelten, bzw. nicht gelten. Ein paar Resultate in verschiedene Richtungen seien hier ohne Beweise angeführt:

1. Auf der Sphäre S^2 gilt der Jordansche Kurvensatz (mit der Modifikation, dass S^2 durch die Kurve in zwei beschränkte Gebiete zerlegt wird). Daher hat dort auch der Satz von Poincaré-Bendixson weiterhin Gültigkeit.
2. Auf den übrigen kompakten zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten (Torus, Brezel, Kleinsche Flasche,...) gilt der Satz von Poincaré-Bendixson nicht. Beispielsweise ist auf dem Torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ für die einfache Differentialgleichung $\dot{x} = \alpha$ mit irrationalem α und beliebigem Anfangswert x_0 immer $\omega(x_0) = \mathbb{T}^2$.

3. Auf kompakten zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten kann man immerhin etwas über sogenannte **Minimalmengen** aussagen. Dies sind nichtleere, kompakte, invariante Mengen, die keine echte Teilmenge mit diesen Eigenschaften enthalten. Es gilt dann

Satz 8.5 (Denjoy-Schwartz) *Sei M eine kompakte zweidimensionale Mannigfaltigkeit und Φ_t ein C^2 -Fluss auf M . Sei weiter A eine Minimalmenge. Dann ist A entweder eine Ruhelage, ein periodischer Orbit oder die ganze Mannigfaltigkeit M . Der letzte Fall tritt nur ein wenn M ein Torus ist.*

Der Beweis dieses Satzes findet sich beispielsweise im Buch von Hartman, S.182 ff.

ANHANG NOCH UNVOLLSTÄNDIG !!!

A Hilfsmittel aus Analysis I/II und Linearer Algebra I/II

A.1 Der Banachsche Fixpunktsatz, C^k -Version

Satz A.1 *Seien X und Λ Banachräume und E eine offene Teilmenge von X . Sei weiter $T : \bar{E} \times \Lambda \rightarrow \bar{E} \times \Lambda$ C^k -glatt in λ und außerdem eine gleichmäßige Kontraktion in x , d.h. es existiert eine Zahl $\rho < 1$, so dass*

$$\|T(x, \lambda) - T(y, \lambda)\|_X \leq \rho \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in \bar{E}.$$

Dann besitzt die Abbildung T für jedes $\lambda \in \Lambda$ genau einen Fixpunkt $x_(\lambda)$ in \bar{E} und die Funktion $x_* : \Lambda \rightarrow \bar{E}$ ist C^k -glatt in λ .*

A.2 Der Satz über implizite Funktionen

Eines der wichtigsten Hilfsmittel aus der nichtlinearen Analysis ist der folgende Satz, der aussagt, wann man Lösungen einer nichtlinearen Gleichung in der Nähe einer schon bekannten Lösung finden kann.

Satz A.2 (Satz über implizite Funktionen) *Seien X ein Banachraum und $F : X \rightarrow X$ eine C^k -glatte Abbildung. Sei weiter $F(x_0) = 0$.*

A.3 Matrixnormen

A.4 Abschneidefunktionen

B Der Beweis des Satzes von Grobman-Hartman

Dieser Satz besagt (siehe Kapitel 7), dass Vektorfelder in der Nähe eines hyperbolischen Gleichgewichts "so aussehen wie ein lineares Vektorfeld". Präziser formuliert, das Vektorfeld ist lokal C^0 -konjugiert zu seiner Linearisierung:

Satz B.1 (Grobman-Hartman) *Sei $x = 0$ ein hyperbolisches Gleichgewicht der Differentialgleichung*

$$\dot{x} = f(x),$$

d.h. es sei $f(0) = 0$ und $\operatorname{Re} \sigma(Df(0)) \neq 0$.

Dann ist f lokal C^0 -konjugiert zur Linearisierung

$$\dot{x} = Df(0)x =: Ax$$

von f in $x = 0$, es existiert also ein lokaler Homöomorphismus h mit

$$A \circ h = h \circ f.$$

Der Beweis verläuft im wesentlichen mit Methoden aus der Funktionalanalysis, d.h. wir lösen die Gleichung $A \circ h = h \circ f$ in einem geeigneten Banachraum. Zunächst formulieren wir diese Gleichung aber um, indem wir $f(x) = Ax + g(x)$ und $h(x) = x + u(x)$ setzen, da wir annehmen können, dass sich h nur wenig von der Identität unterscheidet. Man erhält dann

$$\begin{aligned} A \circ (\text{Id} + u) &= (\text{Id} + u) \circ (A + g) \\ Au - u \circ A - u \circ g &= g. \end{aligned}$$

Definition: Sei X ein Banachraum. Dann heißt eine lineare Abbildung, bzw. ein linearer Operator **beschränkt**, falls

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| < \infty.$$

Wir beginnen mit einem Lemma, das etwas über die Invertierbarkeit von linearen Operatoren sagt.

Lemma: Sei X ein Banachraum.

- (i) Sei $L : X \rightarrow X$ ein linearer Operator mit $\|L\| < a < 1$. Dann ist $\text{Id} + L$ ein Isomorphismus und es gilt die Abschätzung $\|(\text{Id} + L)^{-1}\| \leq 1/(1 - a)$.
- (ii) Sei $G : X \rightarrow X$ ein linearer Isomorphismus mit $\|G^{-1}\| \leq a < 1$. Dann ist $\text{Id} + G$ ein Isomorphismus und $\|(\text{Id} + G)^{-1}\| \leq a/(1 - a)$.

Beweis:

(i) Zu $y \in E$ müssen wir ein $x \in E$ finden mit $(\text{Id} + L)x = y$, d.h. $x = y - Lx$. Die Abbildung $x \mapsto \mu(x) = y - Lx$ ist eine Kontraktion, da

$$\|\mu(x_1) - \mu(x_2)\| = \|L(x_1 - x_2)\| \leq a\|x_1 - x_2\|.$$

Eine Kontraktion in einem Banachraum hat einen eindeutigen Fixpunkt x . Für $\|y\| = 1$ ist dann

$$\|x\| \leq \|y\| + \|Lx\| \leq 1 + a\|x\|,$$

also gilt $\|x\| \leq 1/(1 - a)$, und $(\text{Id} + L)^{-1}y = x$. Damit ist

$$\|(\text{Id} + L)^{-1}\| = \sup_{\|y\|=1} \|(\text{Id} + L)^{-1}y\| \leq 1/(1 - a)$$

wie gewünscht.

(ii) □

Zerlege $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ wobei E^s und E^u der stabile und instabile Eigenraum einer hyperbolischen Matrix A ist. Wir nennen $A^s = A|_{E^s}$ und $A^u = A|_{E^u}$.

Behauptung: Durch die geeignete Wahl einer Norm können wir $\|A^s\| \leq a < 1$ und $\|(A^u)^{-1}\| \leq a < 1$ voraussetzen.

Sei wieder $BC^0(\mathbb{R}^n)$ der Banachraum aller beschränkten stetigen Funktionen von \mathbb{R}^n to \mathbb{R}^n . Dann ist $BC^0(\mathbb{R}^n) = BC^0(E^s) \oplus BC^0(E^u)$, jede Funktion $u \in BC^0(\mathbb{R}^n)$ lässt sich also zerlegen als $u = u^s + u^u$ mit $u^s(z) \in E^s$ und $u^u(z) \in E^u \forall z \in \mathbb{R}^n$. Als Norm auf $BC^0(\mathbb{R}^n)$ benutzen wir $\|u\| := \max(\|u^u\|, \|u^s\|)$.

Lemma: Falls $\phi \in BC^0(\mathbb{R}^n)$ Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $k < \varepsilon = (1 - a)/\|A^{-1}\|$ für eine hyperbolische Matrix A , dann sind A und $A + \phi$ zueinander C^0 -konjugiert.

Beweis:

Wir müssen einen Homöomorphismus h finden, so dass

$$h \circ A = (A + \phi) \circ h. \tag{17}$$

Wir werden nahe der Identität suchen und machen daher den Ansatz $h = \text{Id} + u$ mit $u \in BC^0(\mathbb{R}^n)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} h \circ A &= (A + \phi_2) \circ h \\ \iff (\text{Id} + u) \circ A &= (A + \phi) \circ (\text{Id} + u) \\ \iff A + u \circ A &= A + A \circ u + \phi \circ (\text{Id} + u) \\ \iff -\phi \circ (\text{Id} + u) &= A \circ u - u \circ A \end{aligned}$$

Definiere daher $L(u) := Au - u \circ A = A(u - A^{-1}uA)$. Wir müssen daher zeigen, dass $A^{-1}L$ invertierbar ist, denn dann ist auch L invertierbar. Sobald wir gezeigt haben, dass L invertierbar ist, ist (17) äquivalent dazu, einen Fixpunkt der Gleichung

$$Tu := L^{-1}(-\phi \circ (\text{Id} + u)) = u$$

zu finden.

Wir schreiben u in der Form $u^s + u^u$ und betrachten zunächst die Einschränkung von $A^{-1}L$ auf $BC^0(E^s(\mathbb{R}^n))$. und schreibe die Einschränkung von $A^{-1}L$ als $\text{Id} - G$ wobei $G: BC^0(E^s(\mathbb{R}^n)) \rightarrow BC^0(E^s(\mathbb{R}^n))$ definiert ist als $G(u^s) = A^{-1}u^sA$. Wir müssen nachprüfen, dass G invertierbar ist. Dazu zeigen wir, dass die Abbildung $z \mapsto A(z)$ ein Homöomorphismus ist.

1) $z \mapsto A(z)$ injektiv:

Aus

$$(A + \phi_1)z_1 = (A + \phi_1)z_2$$

folgt

$$\varepsilon \|z_1 - z_2\| \geq \|\phi_1(z_1) - \phi_1(z_2)\| = \|Az_1 - Az_2\| \geq \|A^{-1}\|^{-1} \|z_1 - z_2\|.$$

Da $\varepsilon < \|A^{-1}\|^{-1}$, muss $z_1 = z_2$ sein.

2) $z \mapsto A(z)$ ist surjektiv: Anstatt $A(z) = w$ nach z aufzulösen, können wir auch einen Fixpunkt der Abbildung $z \mapsto A^{-1}w - A^{-1}\phi_1(z)$ finden. Diese Abbildung ist wegen $\|A^{-1}\|\varepsilon < 1$ eine Kontraktion, hat also nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen Fixpunkt. Dies alles bedeutet, dass $G: u^s \mapsto A^{-1}u^sA$ invertierbar ist, mit $G^{-1}: u^s \mapsto A^s u^s A^{-1}$. Aus dem zweiten Teil des vorigen Lemmas folgt nun, dass $u^s \mapsto A^{-1}L(u^s) = (\text{Id} - G)(u^s)$ invertierbar ist, und $\|(\text{Id} - G)^{-1}\| < a/(1 - 1) < 1/(1 - a)$. Wir haben dabei benutzt, dass $\|G^{-1}\| \leq a$ (betrachte dazu u^s mit $\sup_x |u^s(x)| = 1$). Dann ist

$$|Au^s(A + \phi_1)^{-1}(y)| \leq |Au^s(y')| \leq a|u^s(y')| \leq a,$$

wobei wir in der vorletzten Ungleichung ausgenutzt haben, dass $\|A|E^s\| \leq a$). Es ist $L = A \circ (\text{Id} - G)$ und daher $L^{-1} = (\text{Id} - G)^{-1} \circ A^{-1}$. Daraus ergibt sich

$$\|L^{-1} \text{ eingeschränkt auf } (BC^0(E^s(\mathbb{R}^n)))\| \leq \|A^{-1}\|/(1 - a).$$

Wir betrachten die Einschränkung auf $BC^0(E^u(\mathbb{R}^n))E^u$ of $A^{-1}L$, d.h., die Abbildung $u^u \mapsto u^u - A^{-1}u^uA$. Nach dem vorigen Lemma ist diese Abbildung invertierbar (da ja $\|A|_{E^u}^{-1}\| \leq a$) mit Norm $\|A^{-1}\| \leq 1/(1 - a)$. Insgesamt ist also $\|L^{-1}\|$ beschränkt durch $\|A^{-1}\|/(1 - a)$.

Wie schon oben zerlegen wir $Tu = L^{-1}(-\phi(\text{Id} + u))$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|Tu_1 - Tu_2\| &\leq \|L^{-1}\| \|\phi(\text{Id} + u_1) - \phi(\text{Id} + u_2)\| \\ &\leq \|L^{-1}\| \cdot k \cdot \|u_1 - u_2\|. \end{aligned}$$

Nun ist $\|L^{-1}\| \cdot k < \|L^{-1}\| \cdot \varepsilon \leq 1$, ist also eine Kontraktion and hat einen eindeutigen Fixpunkt. Somit haben wir u und damit auch h bestimmt.

Schließlich zeigen wir, dass $h = \text{Id} + u$ ein Homöomorphismus ist. We have u mit

$$(\text{Id} + u) \circ A = (A + \phi) \circ (\text{Id} + u).$$

Es gibt auch v mit

$$(\text{Id} + v) \circ (A + \phi) = A \circ (\text{Id} + v).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (\text{Id} + u) \circ (\text{Id} + v) \circ (A + \phi) &= (\text{Id} + u) \circ A \circ (\text{Id} + v) \\ &= (A + \phi) \circ (\text{Id} + u) \circ (\text{Id} + v). \end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit folgt $(\text{Id} + u) \circ (\text{Id} + v) = \text{Id}$, und aus Symmetriegründen $(\text{Id} + v) \circ (\text{Id} + u) = \text{Id}$, ist h ein Homöomorphismus. \square

Beweis von Satz B.1 Schreibe $f(z) = Az + g(z)$ mit $A = Df(0)$, $g(0) = 0$ und $Dg(0) = 0$. Auch $Dg(x)$ ist klein für $|x|$ klein.

Sei χ eine glatte monotone Abschneidefunktion mit $\chi(t) = 0$ für $|t| \geq 1$ und $\chi(t) = 1$ für $|t| \leq 1/2$. Ausserdem sei $|\chi'(t)| \leq k$ für ein $k > 1$ und alle t . Wähle ein festes $\rho > 0$ und zerlege $\tilde{g}(z) = Az + \chi(\|z\|/\rho)g(z)$. Falls $\|z\| \leq \rho/2$, dann ist $g(z) = f(z)$, im Fall $\|z\| \geq \rho$ ist $g(z) = Az$. Es genügt zu zeigen, dass A konjugiert zu g ist, da A dann lokal konjugiert zu f ist.

Wähle $\varepsilon > 0$ so dass $\|Dg(x)\| \leq \varepsilon/2k$ für alle $\|x\| \leq \rho$. Schreibe $\tilde{g}(z) = \chi(\|z\|/\rho)g(z)$. Wir müssen noch zeigen, dass für hinreichend kleine $\rho > 0$ die Lipschitz-Konstante von \tilde{g} tatsächlich kleiner als ε ist. Es ist

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}(z_1) - \tilde{g}(z_2)\| &\leq \|(\chi(\rho^{-1}\|z_1\|) - \chi(\rho^{-1}\|z_2\|))g(z_1)\| + \|\chi\left(\frac{\|z_2\|}{\rho}\right)(g(z_1) - g(z_2))\| \\ &\leq k\|g(z_1)\| \left| \frac{\|z_1\| - \|z_2\|}{\rho} \right| + \|Dg(x)\| \|z_1 - z_2\| \\ &\leq k\frac{\varepsilon}{2k}\|z_1\| \frac{\|z_1 - z_2\|}{\rho} + \frac{\varepsilon}{2k}\|z_1 - z_2\| \\ &\leq \varepsilon\|z_1 - z_2\| \end{aligned}$$

wobei die zweite Ungleichung aus dem Mittelwertsatz folgt und x ein Punkt auf der Verbindungslinie von z_1 und z_2 ist, falls beide Punkte in $B_\rho(0)$ liegen. Falls nur $z_1 \in B_\rho(0)$ liegt, dann verschwindet in der zweiten Zeile der zweite Term und die Abschätzung gilt immer noch. Falls keiner der Punkte in $B_\rho(0)$ liegt, dann ist sowieso $\tilde{g}(z_1) = \tilde{g}(z_2) = 0$.

Der Satz folgt nun aus Lemma B. \square

C (Nicht ganz unvoreingenommene) Kommentare zur Literatur

Es gibt *sehr* viele Bücher über Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme. Schon von daher kann dieser kurze Überblick keinesfalls vollständig sein.

Ich empfehle besonders die beiden Bücher von Amann [Ama95] und Arnold [Arn84] als Begleitung zur Vorlesung. Beide Bücher decken den Großteil des Stoffes ab und sind auf Deutsch erhältlich. Dabei ist Arnold wesentlich “geometrischer”, sehr vieles wird durch Skizzen anschaulich erklärt. Allerdings sind manche Beweise dann doch sehr elegant, sprich sehr knapp gehalten. Für meinen Geschmack etwas zu ausführlich (und in der Notation auch etwas zu umständlich) ist das Buch von Amann. Auch hier wird nahezu der gesamte Vorlesungsstoff behandelt und gut erklärt.

Als Ergänzung eignet sich das Buch [JS99] von Jordan und Smith. Es richtet sich auch an PhysikerInnen und IngenieurInnen. Man wird daher nicht alle Beweise darin finden, aber sehr viele konkrete Rechnungen und eine Fülle an Beispielen. Ein Schwerpunkt des Buches ist die Störungstheorie, die in der Vorlesung nicht so detailliert behandelt wird.

Auch einen Hang zur Störungstheorie hat das Buch von Verhulst [Ver89], das aber ebenfalls den Stoff der Vorlesung zum Großteil abdeckt (und einiges mehr).

Des weiteren gibt es noch die “klassischen” amerikanischen Lehrbücher von Coddington-Levinson [CL55], Hale [Hal69] und von Hartman [Har64]. Inhaltlich sind vor allem die beiden letzten nicht so unaktuell, wie man es nach fast vierzig Jahren erwarten könnte, aber der Stil ist natürlich etwas ungewohnt. Zum Nachschlagen sind diese Bücher aber durchaus geeignet.

Die Fülle neuerer amerikanischer Bücher zum Thema (z. B. [Chi01], [Cooetal00], [HK91] und [Per01]) ist kaum zu überschauen, die meisten, die ich davon kenne, sind durchaus brauchbar, ansprechend aufgemacht, aber auf eine etwas knappere Behandlung des Stoffs abgestimmt. Die meisten dieser Bücher enthalten auch sehr viel zu den Themen Verzweigungen (“bifurcations”) und Chaos, die uns erst im Sommersemester intensiv begegnen werden.

Im Semester-Handapparat steht zudem ein Buch-Manuskript von Katok und Hasselblatt. Hier wird eine Einführung in die Dynamischen Systeme hauptsächlich vom Standpunkt diskreter dynamischer Systeme

gegeben. Inhaltlich hat dies mehr mit der Vorlesung “Dynamische Systeme II” im Sommersemester zu tun, aber wer schon mal einen Vorgeschmack bekommen möchte, kann dies hier tun.

Von der deutschsprachigen Literatur seien noch die Bücher von Aulbach [Aul97], Heuser [Heu91] und Walter [Wal00] erwähnt. Diese Bücher haben aber thematisch deutlich weniger Überschneidungen mit der Vorlesung als die oben angegebenen und sind als Begleitung zur Vorlesung nur bedingt geeignet. Wer historisch interessiert ist, wird im Buch von Heuser viele interessante Anmerkungen finden.

Vor allem zum Schmökern eignet sich auch das Buch von Braun [Bra94], in dem einige Anwendungen sehr breit und anschaulich erzählt werden.

Beispiele aus der Vorlesung wurden unter anderem [BD01], [GL87] entnommen.

Literatur zur Vorlesung

- [Ama95] H. Amann. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. de Gruyter, 2. Auflage 1995, (1. Auflage von 1983).
- [Arn84] V.I. Arnold. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer Verlag, 2001 (1. russische Auflage stammt von 1984).
- [Aul97] B. Aulbach. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. , Spektrum Verlag, 1997.
- [BD01] F. Brauer and C. Castillo-Chavez. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer Verlag, 2001.
- [Bra94] M. Braun. *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen*. Springer-Lehrbuch, 1994 (1. Auflage stammt von 1975).
- [Chi01] C. Chicone. *Ordinary differential equations with applications*. Springer Texts in Applied Mathematics **34**, 2001.
- [CL55] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations*, 1955.
- [Cooetal00] K. R. Coombes, B. R. Hunt, R. L. Lipsman, J. E. Osborn and G. J. Stuck. *Differential equations with MATLAB* Wiley, New York, 2000.
- [GL87] G. Gabisch and H.-W. Lorenz. *Business Cycle Theory* Springer Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems **283**, 1987.
- [Hal69] J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations*, 1969.
- [HK91] J. K. Hale and H. Kocak. *Dynamics and Bifurcations*. Springer Texts in Applied Mathematics **4**, 1991.
- [Har64] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*, 1964.
- [Heu91] H. Heuser. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Teubner Verlag, 1991.
- [JS99] D. W. Jordan and P. Smith. *Nonlinear Ordinary Differential Equations – An Introduction to Dynamical Systems*. Oxford University Press, 3. Auflage, 1999. (deutlich erweitert gegenüber den vorigen Auflagen)
- [Per01] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*. Springer Texts in Applied Mathematics **7**, 3. Auflage, 2001 (1. Auflage ca. 10 Jahre alt).
- [Ver89] F. Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer Verlag, 1989.
- [Wal00] W. Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung*. Springer-Lehrbuch, 7., neu bearb. und erweiterte Auflage, 2000.