Fragen zur Vorlesung Dynamische Systeme I

1. Was versteht man unter einem *Fluss* Φ_t auf dem Phasenraum $X = \mathbb{R}^n$?

2. Was ist ein *zeitlich diskretes dynamisches System* ?

3. Was ist der *Orbit* eines Punktes x_0 unter einem Fluss Φ_t ?

4. Wann nennt man einen Orbit *stationär*, wann *periodisch*, wann *homoklin* ?

5. Was ist das Vektorfeld eines Flusses Φ_t ?

6. Welche Differentialgleichung lösen die Bahnkurven eines Flusses Φ_t ?

7. Zeichne Phasenportraits und Integralkurven für die Differentialgleichungen

   (i) $\dot{x} = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$ und

   (ii) $\dot{x} = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$.

8. Wie ist für eine $n \times n$-Matrix B die *Matrix-Exponentialfunktion* e^B definiert ?

9. Bestimme die Matrix e^{At} für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und für $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

10. Bestimme die Matrix e^{At} für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Sei A eine $n \times n$-Matrix. Zeige, dass durch $\Phi(t,x) = e^{At}x$ ein Fluss auf $X = \mathbb{R}^n$ definiert wird.

12. Sei $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$. Betrachte eine Koordinatentransformation $x = \Psi(y)$ mit einer C^1-Funktion Ψ. Welche Differentialgleichung löst $y(t)$ dann ?

13. Was ist eine *autonome Differentialgleichung*, was eine *nichtautonome Differentialgleichung* ? Gib jeweils ein Beispiel.

14. Was ist eine *Evolution* ?

15. Gib (mit Beweis) ein Anfangswertproblem an, das keine eindeutige Lösung hat.

16. Löse durch Trennung der Variablen das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \alpha(t)y(t)$, $y(0) = y_0 \neq 0$ mit einer stetigen Funktion α.

17. Löse durch Trennung der Variablen das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = -\frac{t}{x}$ mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0 \neq 0$.

18. Bestimme alle Ruhelagen für das gedämpfte Pendel $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \sin x = 0$.

19. Was versteht man unter einem *ersten Integral* ?

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y \\
\dot{y} &= -\sin x \quad ?
\end{aligned}
$$

21. Gib einen (Integral-)Ausdruck für die Periode der periodischen Lösung von $\ddot{x}+\sin x = 0$ mit Anfangsbedingung $x(0) = a \in (0,\pi)$, $\dot{x} = 0$ an.

22. Besitzt das System
$$
\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_1 \\
\dot{x_2} &= x_2
\end{aligned}
$$
mit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ein nichtkonstantes erstes Integral?

23. Besitzt das System
$$
\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_1 \\
\dot{x_2} &= -x_2
\end{aligned}
$$
mit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ein nichtkonstantes erstes Integral?

24. Sei $X = \mathbb{R}^{2N}$ und
$$
\begin{aligned}
\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1,2,\ldots,N \\
\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1,2,\ldots,N?
\end{aligned}
$$
das durch die zweimal stetig differenzierbare Hamilton-Funktion $H : X \to \mathbb{R}$ definierte Hamilton-System. Zeige, dass H längs Trajektorien konstant ist.

25. Wie lautet das Hamilton-System zur Hamilton-Funktion $H(p,q) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(q)$ mit $p, q \in \mathbb{R}^N$?

26. Was ist ein *integrierender Faktor* ?

27. Erkläre die Bedeutung der einzelnen Terme im Räuber-Beute-System
$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= (1-y)x \\
\dot{y} &= \alpha(x-1)y, \quad \alpha > 0.
\end{aligned}
$$

28. Finde durch Multiplikation mit $\frac{1}{xy}$ ein erstes Integral des Räuber-Beute-Systems
$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= (1-y)x \\
\dot{y} &= \alpha(x-1)y, \quad \alpha > 0.
\end{aligned}
$$

29. Skizziere das Phasenportrait des nichtlinearen Pendels
$$
\ddot{x} + g(x) = 0
$$
mit $g(x) = x - x^3$.

30. Welche Differentialgleichung erfüllen Travelling Wave Lösungen $u(t,x) = U(x-ct)$ der partiellen Differentialgleichung
$$
\partial_t u = \partial_{xx} u + u - u^3 \quad ?
$$

$$
\begin{aligned}
A + B &\overset{k_1}{\to} X + Y \\
A + X &\overset{k_2}{\to} 2Y
\end{aligned}
$$

beschreiben lässt. Leite Differentialgleichungen für die Konzentrationen a, b, x und y der Stoffe A, B, X und Y her.

32. Formuliere den Banachschen Fixpunktsatz.

33. Welche Integralgleichung erfüllt die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$?

34. Wie lautet der Satz von Picard-Lindelöf ?

35. Sei $x(t)$ die Lösung einer Differentialgleichung auf dem maximalen Existenzintervall. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch ?

    (i) Maximale Existenzintervalle von Lösungen einer Differentialgleichung sind abgeschlossen

    (ii) Die Lösung $x(t)$ existiert nicht für alle Zeiten $\Rightarrow \|x(t)\|$ ist unbeschränkt.

    (iii) Die Lösung $x(t)$ existiert für alle Zeiten $\Rightarrow \|x(t)\|$ ist beschränkt, d.h. es gibt $M > 0$ so dass $\|x(t)\| \leq M$ für alle t.

36. Gib eine hinreichende Bedingung an, so dass die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{z} = g(z)$, $z(0) = z_0$ für alle positiven Zeiten existiert.

37. Formuliere eine Aussage zur stetigen Abhängigkeit der Lösung einer Differentialgleichung von Parametern !

38. Sei $x_*(t)$ die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ zum Anfangswert $x_*(t_0) = x_0$ und $W(t, t_0)$ die zugehörige Wronski-Matrix. Welche Differentialgleichung erfüllt dann die Ableitung $v(t) = W(t, t_0)y_0$ des Flusses nach den Anfangsbedingungen?

39. Formuliere den Satz von der Begradigung und stelle seine Aussage durch eine Skizze dar.

40. Was ist eine homogene lineare Differentialgleichung ?

41. Wie kann man eine lineare Differentialgleichung mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion lösen ?

42. Löse das Anfangswertproblem

$$
\dot{x} = \begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 18 & 10 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

43. Löse das Anfangswertproblem

$$
\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

44. Beschreibe in Worten das allgemeine Vorgehen zur Lösung einer linearen Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit einer $n \times n$-Matrix A.

45. Zeichne Phasenportraits für die linearen Differentialgleichungen

(i) $\dot{x} = \begin{pmatrix} \ldots \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$ und

(ii) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x.$

46. Wie lautet die Variation-der-Konstanten-Formel für die inhomogene lineare Differentialgleichung $\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$, wobei A eine $n \times n$-Matrix und b eine stetige Funktion sind.

47. Löse durch Variation-der-Konstanten die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = x_0.$$

48. Betrachte die nichtlineare Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $f(0) = 0$. Gib ein hinreichendes Kriterium für die asymptotische Stabilität der Ruhelage $x = 0$ an.

49. Wann nennt man zwei Flüsse Φ_t und Ψ_t C^0-*flussäquivalent* ?

50. Was besagt der Satz von Grobman-Hartman ?

51. Definiere die ω-Limesmenge eines Punktes x_0.

52. Was ist die α-Limesmenge und was beschreibt sie ?

53. Welche ω-Limesmengen können bei einem Fluss auf der reellen Achse auftreten.

54. Skizziere eine beschränkte Trajektorie eines ebenen Flusses, deren ω-Limesmenge weder ein einzelner Punkt noch ein periodischer Orbit ist.

55. Sei γ ein periodischer Orbit und $x_0 \in \gamma$. Was ist dann $\omega(x_0)$?

56. Sei γ ein homokliner Orbit zum Gleichgewicht x_+ und $x_0 \in \gamma$. Was ist dann $\omega(x_0)$?

57. Wann ist eine Menge M *positiv invariant* unter einem Fluss Φ_t, wann *negativ invariant* und wann *invariant*?

58. Sei der Orbit $\gamma^+(x_0)$ beschränkt. Welche vier Eigenschaften hat dann $\omega(x_0)$?

59. Was versteht man unter einer *Ljapunov-Funktion* ?

60. Gib für ein Gradientensystem $\dot{x} = -\nabla V(x)$ eine Ljapunov-Funktion an.

61. Was besagt das Invarianzprinzip von LaSalle ?

62. Zeige, dass die Energie $\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \cos x$ entlang Lösungen des gedämpften Pendels $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \sin x = 0, \gamma > 0$ strikt fällt, außer in den Ruhelagen.

63. Skizziere einen Fluss mit einem stabilen, aber nicht asymptotisch stabilen Gleichgewicht.

64. Formuliere den Satz von Poincaré-Bendixson.

65. Auf welchem Satz, der nur in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gilt, beruht der Beweis des Satzes von Poincaré-Bendixson ?

66. Skizziere für jeden der beiden Fälle im Satz von Poincaré-Bendixson ein Phasenportrait.

nicht als ω-Limesmenge $\omega(x_0)$ eines Punktes auftreten können.

68. Gilt der Satz von Poincaré-Bendixson auch für Flüsse auf dem zweidimensionalen Torus ? Gib ggf. ein Gegenbeispiel.

69. Sei Φ_t ein Fluss auf $X = \mathbb{R}^2$ und der Orbit $\gamma(x_0)$ sei beschränkt. Sind die folgenden Aussagen dann wahr oder falsch ?

    (i) $y \in \omega(x_0) \;\Rightarrow \alpha(y)$ ist ein Gleichgewicht

    (ii) Das Innere jedes periodischen Orbits enthält ein Gleichgewicht.

    (iii) Die ω-Limesmenge eines Punktes enthält höchstens ein Gleichgewicht.

70. Was besagt das negative Kriterium von Bendixson über periodische Orbits ?

Und hier noch viel Platz für eigene Fragen: