10. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamische Systeme I

Abgabe am 11.07.2006 in der Vorlesung

Aufgabe 37 (Lissajous-Figuren):

Betrachte für eine symmetrische reelle 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ das Hamilton-System

$$(*) \quad \ddot{x} = -Ax$$

zur Hamiltonfunktion $H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^T \dot{x} + x^T A x)$.

(i) Transformiere $(*)$ auf die Gestalt

$$(**) \begin{cases} \ddot{y}_1 + \omega_1 y_1 &= 0, \\ \ddot{y}_2 + \omega_2 y_2 &= 0 \end{cases}$$

mit ω_1, ω_2 reell (entkoppelte "Pendel").

(ii) Zeichne (ohne `DSTOOL`, `ODE ARCHITECT` etc.) die ebene Lösungskurve $(x_1(t),\ x_2(t))$ von $(*)$ für $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ mit Anfangsbedingung $x_1 = x_2 = \dot{x}_1 = -\dot{x}_2 = 1$.

(iii) Skizziere (mit `DSTOOL` o. ä.) einige Lösungskurven von $(**)$ für drei selbst gewählte Wertepaare (ω_1, ω_2) mit $\omega_i > 1$.

Freiwilliger Zusatz: Wie muss man (ω_1, ω_2) wählen, damit sich die Lösungskurven schließen ?

Aufgabe 38: Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y \\ \dot{y} &= \alpha y \end{aligned}$$

mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ein nichtkonstantes erstes Integral ?

Aufgabe 39: Zeige, dass die allgemeine Lösung von

$$\ddot{u}(t) + u(t) = f(t)$$

die Gestalt

$$u(t) = a \cos t + b \sin t + \int_0^t f(s) \sin(t-s)\, ds$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ hat. Sei f nun 2π-periodisch. Zeige, dass $u(t)$ ebenfalls 2π-periodisch ist, falls gilt:

$$\int_0^{2\pi} f(s) \sin s\, ds = \int_0^{2\pi} f(s) \cos s\, ds = 0.$$

Bemerkung: Eine Lösung existiert also, falls f in $L^2(0, 2\pi)$ orthogonal zum Kern des Operators „$\frac{d^2}{dt^2} + \mathrm{Id}$“ ist.

Sei A eine beliebige $N \times N$-Matrix. Wir wollen eine Variation-der-Konstanten-Formel für lineare Differenzengleichungen

$$x_{n+1} = Ax_n + b_n,$$

mit $x_n,\ b_n \in \mathbb{R}^N$ herleiten.
Schreibe dazu x_2, x_3 und x_4 als Funktion von x_1 und der $b_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ und schließe daraus auf eine allgemeine Darstellung. Beweise diese dann mittels vollständiger Induktion.

Freiwilliger Zusatz:
Finde eine geschlossene Darstellung für die Glieder x_n der Folge $1, 1, 7, 17, 47, 113, \ldots$, die die Differenzengleichung $x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1} + 2^n$ mit $x_1 = 1, x_2 = 1$ erfüllen ?