B. Fiedler, J. Härterich
FU Berlin
Sommersemester 2006

11. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamische Systeme I

Abgabe am 18.07.2006 in der Vorlesung

Aufgabe 41:
Ein Modell für die Ausbreitung von Tollwut [Anderson et al., *Nature* **289**, 1981] hat die Form:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= rSe^{-S} - \beta SI - \mu S \\ \dot{I} &= \beta SI - (\mu + \alpha) I \end{aligned}$$

Dabei ist wie im Modell von Kermack und McKendrick $S(t)$ die Anzahl der nicht immunen („suszeptiblen") Füchse und $I(t)$ die Anzahl der infizierten Füchse.
Finde die Ruhelagen des Modells in Abhängigkeit der (positiven) Parameter α, β, μ und r. Existieren Ruhelagen mit S, $I > 0$? Erkläre die Bedeutung dieser Gleichgewichte und diskutiere ggf. deren Stabilität.

Aufgabe 42:
Gegeben sei ein Fluss auf X und eine nicht-leere, kompakte, invariante Teilmenge M von X. Beweise oder widerlege: M ist stabil genau dann, wenn jede Umgebung von M eine positiv invariante Umgebung von M enthält.

Aufgabe 43:
Zu f in $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ betrachte den *Newton-Fluss*

$$(*) \qquad \dot{x} = -[D_x f(x)]^{-1} f(x).$$

(N.B.: Das Newton-Verfahren zur Lösung von $f(x) = 0$ erhält man durch explizite Euler-Diskretisierung von $(*)$ mit Schrittweite $h = 1$, indem man also $\dot{x}$ durch eine Differenz $x_{n+1} - x_n$ ersetzt.).
Zeige: Jede einfache Nullstelle x^* von f (d.h. $f(x^*) = 0, \det D_x f(x^*) \neq 0$) ist ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht von $(*)$!
Tipp: Betrachte Σf_i^2.

Aufgabe 44: Sei $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und für jede Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

gelte

$$V(x(t)) < 0 \quad \Rightarrow \frac{d}{dt} V(x(t)) < 0.$$

Zeige: Ist $V(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dann ist der Orbit $\gamma^+(x_0)$ unbeschränkt.