B. Fiedler, J. Härterich
FU Berlin
Sommersemester 2006

2. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamische Systeme I

Abgabe am 11.05.2006 in der Vorlesung

Aufgabe 5:
Das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - (x^2 + y^2)x \\ x + y - (x^2 + y^2)y \end{pmatrix} .$$

Transformiere diese Differentialgleichung auf Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \end{pmatrix},$$

mit $\varrho > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Skizziere das zugehörige Vektorfeld und das Phasenportrait jeweils in den Koordinaten (ϱ, φ) sowie (x, y).

Aufgabe 6:
Den 2-Torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ erhält man topologisch als Quotientenraum, indem man in $\mathbb{R}^2$ Punkte (x_1, x_2) und $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ miteinander identifiziert, falls $x_1 - \tilde{x}_1$ und $x_2 - \tilde{x}_2$ beide ganzzahlig sind. Verifiziere zunächst, dass durch die Abbildung

$$\Phi_t(x_1, x_2) = (x_1 + \alpha t, x_2 + \beta t), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ein Fluss auf dem Torus definiert wird.
Sei nun β/α rational. Wie sehen dann typische Trajektorien aus? Beschreibe die ω-Limesmengen.
Freiwilliger Zusatz: Was passiert, wenn β/α irrational ist ?

Aufgabe 7:
Berechne e^{At} für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\omega > 0$ und $t \in \mathbb{R}$.
Löse damit die lineare Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}$$

zu Anfangsbedingungen $x_1(0) = a_1$, $x_2(0) = a_2 \in \mathbb{R}$. Zeichne

(a) das zugehörige Phasenportrait,

(b) die Graphen der Abbildungen $t \mapsto x_1(t)$ und $t \mapsto x_2(t)$
für Anfangsbedingungen $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ Deiner Wahl, und

(c) eine typische Integralkurve im (x_1, x_2, t)–Diagramm.

AUFGABE 6.

Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X \to X$ eine Evolution mit zugehörigem nicht-autonomem Vektorfeld

$$f(s, x) = D_t \Phi(t + s, s, x)\big|_{t=s} .$$

Zeige :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times \tilde{X} &\to \tilde{X} \\ (t, (s, x)) &\mapsto (t + s, \Phi(t + s, s, x)) . \end{aligned}$$

ist ein Fluss auf dem *erweiterten Phasenraum* $\tilde{X} = \mathbb{R} \times X$. Das zugehörige Vektorfeld auf $\tilde{X}$ ist $\tilde{f}(s, x) = (1, f(s, x))$.