B. Fiedler, J. Härterich
FU Berlin
Sommersemester 2006

3. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamische Systeme I

Abgabe am 18.05.2006 in der Vorlesung

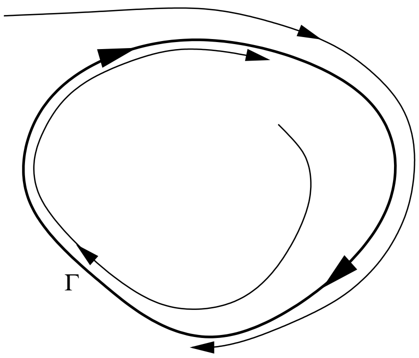
Aufgabe 9:
Bestimme die ω-Limesmenge für *alle* Trajektorien von

(i) $\dot{x} = x^2(1-x)$

(ii) $\dot{x} = cos(x)$

(iii) $\begin{cases} \dot{x} &= y^3 \\ \dot{y} &= -x^3 \end{cases}$

Aufgabe 10:
Gegeben sei ein periodischer Orbit Γ in $X = \mathbb{R}^n$ und eine Umgebung U von Γ in X, so dass jede Trajektorie $\gamma(x_0)$ mit $x_0 \in U$ für $t \to \infty$ gegen Γ konvergiert, etwa so:



Zeige, dass dann jedes erste Integral in U konstant ist.

Aufgabe 11:
Sei $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Funktion, mit $f_1(a) = 0$ und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton fallende Funktion mit $f_2(b) = 0$.
Zeige, dass die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1) \end{aligned}$$

genau eine Ruhelage in $(x_1, x_2) = (b, a)$ besitzt, die von einer Familie periodischer Orbits umgeben ist.
Tipp: Finde und benutze ein strikt konvexes erstes Integral.

Aufgabe 12:
Zeige, dass

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + \frac{1}{2}x^2 \\ \dot{y} &= -x \end{cases}$$

einen integrierenden Faktor der Form $M(y)$ besitzt, der *nicht* von x abhängt. Nutze dies aus, um ein erstes Integral zu bestimmen und das Phasenportrait zu skizzieren.