5. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamische Systeme I

Abgabe am 01.06.2006 in der Vorlesung

Aufgabe 17:
Betrachte die Pendelgleichung

$$\ddot{x} + g(x) = 0$$

für eine stetige ungerade Funktion g mit $g(x) \cdot x > 0$ für $x \neq 0$. Sei $p(g, a) > 0$ die minimale Periode der Lösung mit Anfangswert $x(0) = a > 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Zeige:

(i) Falls $g_1(x) < g_2(x)$ für alle $x > 0$, dann ist $p(g_1, a) > p(g_2, a)$ für alle $a > 0$.

(ii) Falls $x \mapsto g(x)/x$ für $x > 0$ streng monoton fällt, dann wächst $a \mapsto p(g, a)$ streng monoton für $a > 0$.

(iii) Was lässt sich ohne lange Rechnung über die Periode des mathematischen Pendels, d.h. für $g(x) = \sin x$, aussagen ?

Hinweis zu (ii): $y(t) := \frac{a_1}{a_2} x(t)$ löst die Gleichung $\ddot{y} + \tilde{g}(y) = 0$ mit $\tilde{g}(y) := \frac{a_1}{a_2} g(\frac{a_2}{a_1} y)$.

Aufgabe 18:
Löse mit dem in DSTOOL voreingestellten Runge-Kutta-Verfahren die Lorenz-Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x), \\ \dot{y} &= 28x - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - \frac{8}{3} z, \end{aligned}$$

zu Anfangsbedingungen $x_1(0) = x_2(0) = 3$ und $x_3(0) \in \{5.0, 5.1\}$ auf dem Intervall $t \in [0, 10]$ mit Schrittweiten $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.01$ und 0.005. Was ist zu beobachten ? Zeichne $x_1(t)$ für beide Anfangsbedingungen und unterschiedliche Schrittweiten ? Was bedeutet dies für die Verlässlichkeit der berechneten Lösungen ?

Aufgabe 19:
In einem Brandenburger See leben Beute- und Räuberfische x bzw. y, die dem Volterra-Lotka Gesetz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\mu - \nu y), \\ \dot{y} &= y(-\varrho + \sigma x), \end{aligned}$$

mit $x, y, \mu, \nu, \varrho, \sigma > 0$ gehorchen. Zeige, dass der zeitlich gemittelte Beutefischbestand

$$\overline{x} := \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

für alle Anfangsbedingungen $x(0), y(0) > 0$ gleich ist.
Hinweis: Nutze die Periodizität der Lösungen aus.

Aufgabe 20:
Wir interessieren uns für *Travelling–wave*–Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x \left(u(x,t)^2\right) + \partial_{xx} u(x,t) = 2u(x,t)\partial_x u(x,t) + \partial_{xx} u(x,t), \qquad (*)$$

d.h. Funktionen $U \in C^2$, so dass $u(x,t) = U(x - st)$ für eine Geschwindigkeit $s \in \mathbb{R}$ eine Lösung von $(*)$ ist. Zeige, dass eine Travelling-wave-Lösung mit

$$\lim_{x \to -\infty} u(x,t) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} u(x,t) = \alpha, \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \pm\infty} u_x(x,t) = 0,$$

genau dann existiert, wenn $\alpha \geq 0$. Für diese gilt $s \leq 0$ und $0 \leq u(x,t) \leq \alpha$.