B. Fiedler, J. Härterich
FU Berlin
Sommersemester 2006

6. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamische Systeme I

Abgabe am Dienstag, 13.06.2006 in der Vorlesung

Aufgabe 21:

Betrachte eine chemische Reaktion mit Massenwirkungskinetik, die sich durch die Reaktionen

$$\begin{aligned} A + B &\overset{k_1}{\to} X + Y \\ X + C &\overset{k_2}{\to} B \\ Y + C &\overset{k_3}{\to} 2B \end{aligned}$$

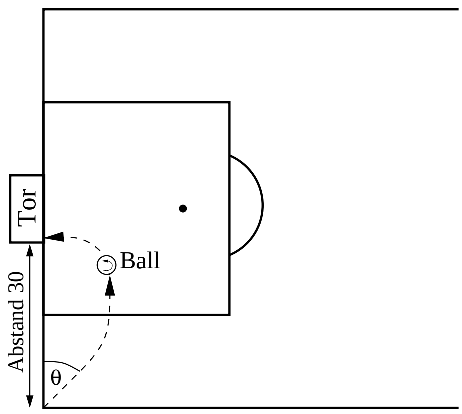
beschreiben lässt. Leite Differentialgleichungen für die Konzentrationen a, b, c, x und y der Stoffe A, B, C, X und Y her und bestimme zwei unabhängige Erhaltungsgrößen.

Aufgabe 22:

Im Fussballspiel Dynamien-Equalien tritt Integrix einen angeschnittenen Eckball so kunstvoll, dass er eine Kurve beschreibt und genau im „kurzen“ Eck ins Tor trifft. Simuliere die Bahn des Eckballs als ebene Kurve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), 0)$ mit `DSTOOL` o.ä., die der Differentialgleichung

$$\ddot{\mathbf{x}} = -c_{Luft}|\dot{\mathbf{x}}|\dot{\mathbf{x}} + c_{Magnus}\,\omega \times \dot{\mathbf{x}}$$

genügt.
Dabei sei $c_{Luft} = 0.01$, $c_{Magnus} = 0.03$ und ω ein Vektor der Länge 4π in z-Richtung.
Die beiden Terme auf der rechten Seite der Differentialgleichung beschreiben die Kräfte, die durch den Luftwiderstand bzw. den Magnuseffekt auf den Ball wirken.



Plotte für die Schussgeschwindigkeit $|\dot{\mathbf{x}}(0)| = 20$ und die Abschusswinkel $\theta = 10°, 15°, 20°, 25°$ und $30°$ die Flugkurve. Wie groß ist jeweils der maximale Abstand des Balls von der Torauslinie ? Welcher der Schüsse trifft ins Tor ?
Mehr zum Magnuseffekt und „Kunstschüssen“ unter `physicsweb.org/articles/world/11/6/8`

Aufgabe 23:

Bestimme mit `DSTOOL` o.ä. die Periode $p(\varepsilon)$ der periodischen Lösung des van der Pol Oszillators

$$\varepsilon^2\ddot{x} - (1 - 3x^2)\dot{x} + x = 0$$

für $\varepsilon = \frac{i}{10}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Nützlich ist hierbei im Fenster **Orbits** sowohl die Einstellung der Schrittweite als auch die *Stopping condition.* Mit *Event Stopping* kann man angeben, dass die Differentialgleichung so lange gelöst werden soll, bis eine bestimmte Bedingung erfüllt ist, beispielsweise wenn die Gerade $x = 0$ erreicht wird. Benutze Deine „Daten“ dann, um (ohne Beweis) eine Vermutung über das Verhalten von $p(\varepsilon)$ für $\varepsilon \searrow 0$ aufzustellen.

Aufgabe 24:

Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : M \to M$ ein Abbildung, für welche eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ positiver reeller Zahlen mit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ existiert, so dass

$$d(T^n(x), T^n(y)) \;\leq\; a_n d(x, y), \qquad \forall\; x, y \in M \text{ und } n \geq 1.$$

Zeige: Es existiert genau ein Fixpunkt $\overline{x}$ von T.