B. Fiedler, J. Härterich
FU Berlin
Sommersemester 2006

7. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamische Systeme I

Abgabe am 20.06.2006 in der Vorlesung

Aufgabe 25:

(i) Sei X ein Banachraum und $F : X \to X$ eine stetig differenzierbare Kontraktion, d.h. es existiert ein $\gamma \in (0,1)$, so dass

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \gamma \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Zeige: Für jedes beliebige $x_0 \in X$ erfüllt die Ableitung in x_0 die Ungleichung $\|DF(x_0)\| \leq \gamma$.

(ii) Sei $I = [a, b]$ ein Intervall und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ist die durch

$$\mathcal{S}(x)(t) := \int_a^t g(x(s))\,\mathrm{d}s$$

definierte Abbildung $\mathcal{S} : C^0(I, \mathbb{R}) \to C^0(I, \mathbb{R})$ stetig differenzierbar ?

Aufgabe 26:
Für eine $n \times n$-Matrix betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Berechne die sukzessiven Approximationen $\varphi_k(t)$ des Iterationsverfahrens von Picard-Lindelöf mit $\varphi_0(t) \equiv x_0$.
Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergieren die $\varphi_k(t)$ gegen die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems ?

Aufgabe 27:
Sei $f : X \to X = \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und bezeichne $J(x_0) = (t_-(x_0), t_+(x_0))$ das maximale Existenzintervall der Lösung von

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0.$$

(i) Zeige, dass $x_0 \mapsto t_+(x_0) \in (0, \infty]$ unterhalb-stetig ist. Dabei heißt eine Funktion g unterhalb-stetig in x_0, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \to x_0$ gilt:

$$g(x_0) \leq \liminf_{n \to \infty} g(x_n).$$

(ii) Zeige anhand der komplexen Differentialgleichung

$$\dot{z} = z^2, \quad z \in \mathbb{C}$$

dass die maximale Existenzzeit t_+ *nicht* stetig von den Anfangsbedingungen abhängen muss.

Aufgabe 28:
Formuliere eine ernst gemeinte, mathematische Frage zur Vorlesung !