B. Fiedler, J. Härterich
FU Berlin
Sommersemester 2006

8. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamische Systeme I

Abgabe am 27.06.2006 in der Vorlesung

Aufgabe 29:

(i) Seien v und φ stetige, nicht-negative Funktionen und gelte

$$v(t) \leq \int_0^t v(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Zeige, dass dann $v(t) \equiv 0$ für $t \in [0,1]$.

(ii) Zeige: Seien $L, M, C \geq 0$ positive reelle Zahlen und $u(t) \geq 0$ eine stetige Funktion auf dem Intervall $[t_0, t] \subseteq \mathbb{R}$. Dann folgt aus der Integralungleichung

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^t M + Lu(s)\,\mathrm{d}s \qquad \forall t \in [t_0, t]$$

die Ungleichung

$$u(t) \leq Ce^{L(t-t_0)} + \frac{M}{L}\left(e^{L(t-t_0)} - 1\right) \qquad \forall t \in [t_0, t].$$

Aufgabe 30:
Zeige, dass $x_*(t) = \tanh(\frac{t}{2})$, $y_*(t) = \dot{x}_*(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3 \end{aligned}$$

ist. Wie lautet die Matrix-Differentialgleichung für die Ableitung nach den Anfangsbedingungen (x_0, y_0) entlang dieser Lösung ?

Aufgabe 31:
Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $x(\cdot; x_0, t_0)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = h(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

auf dem maximalen Existenzintervall (t_-, t_+).
Welche Differentialgleichung erfüllt die Ableitung $\theta(t) := D_{t_0}x(t; x_0, t_0)$ nach der Anfangszeit ?
Tipp: Betrachte die Differentialgleichung

$$\left\{ \begin{array}{rclcrcl} \dot{x} &=& h(t,x), & \qquad & x(t_0) &=& x_0 \\ \dot{t} &=& 1, & & t(t_0) &=& t_0 \end{array} \right.$$

im erweiterten Phasenraum.

Aufgabe 32:
Betrachte den Banachraum BC^1 der stetig differenzierbaren Vektorfelder $f : X \to X = \mathbb{R}^n$, für die gilt

$$\|f\|_{BC^1} := \sup_{x \in X}(|f(x)| + |f'(x)|) < \infty.$$

Seien $f, g \in BC^1$ und bezeichne $x(t, f)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0$$

zur Zeit t. Kann man, für festes t, die Abbildung

$$x(t, \cdot) : \; BC^1 \to X, \qquad f \mapsto x(t, f),$$

nach f differenzieren?
Welche Differentialgleichung erfüllt gegebenenfalls die Variation $w(t) := \mathrm{D}_f x(t, f) g$?