

## 9. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG DYNAMISCHE SYSTEME I

ABGABE AM 04.07.2006 IN DER VORLESUNG

### AUFGABE 33:

Beweise oder widerlege: Für  $n \times n$ -Matrizen  $B$  und  $C$  gilt

$$(i) \quad BC = CB \quad \Leftrightarrow \quad Be^{Ct} = e^{Ct}B \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad BC = CB \quad \Leftrightarrow \quad e^{(B+C)t} = e^{Bt}e^{Ct} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

### AUFGABE 34:

Bestimme die Lösungen der linearen Differentialgleichungen

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} u, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### AUFGABE 35:

Sei  $A = (a_{ij})$  eine  $n \times n$ -Matrix, deren Eigenwerte alle negativen Realteil besitzen. Wähle nun eine beliebige Matrixnorm, zum Beispiel  $\|A\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$ .

Zeige, dass dann Konstanten  $K, \alpha > 0$  existieren, so dass

$$\|e^{At}\| \leq Ke^{-\alpha t} \quad \text{für alle } t \geq 0$$

gilt.

Wie groß kann  $\alpha$  gewählt werden ?

### AUFGABE 36:

Wir wollen das gedämpfte lineare Pendel

$$\ddot{x} + \nu \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

mit  $\nu, \omega > 0$  und Anfangsbedingung  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$  untersuchen.

- (i) Bestimme für alle  $\nu, \omega^2$  jeweils explizit die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems, zeichne Phasenportraits und skizziere in der  $(\nu, \omega)$ -Ebene Bereiche mit unterschiedlichem qualitativen Verhalten.
- (ii) Wie ändert sich beim Übergang zwischen verschiedenen Zonen in der  $(\nu, \omega)$ -Ebene (z.B. bei Änderung der Dämpfung  $\nu$ ) das Phasenportrait ?  
Treten dabei Unstetigkeiten der Jordan-Normalform bzw. des Phasenportraits auf ?