B. Fiedler, J. Härterich
FU Berlin
Sommersemester 2006

9. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamische Systeme I

Abgabe am 04.07.2006 in der Vorlesung

Aufgabe 33:
Beweise oder widerlege: Für $n \times n$-Matrizen B und C gilt

(i) $BC = CB \quad \Leftrightarrow \quad Be^{Ct} = e^{Ct}B$ für alle $t \in \mathbb{R}$

(ii) $BC = CB \quad \Leftrightarrow \quad e^{(B+C)t} = e^{Bt}e^{Ct}$ für alle $t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 34:
Bestimme die Lösungen der linearen Differentialgleichungen

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} y, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} u, \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 35:
Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix, deren Eigenwerte alle negativen Realteil besitzen. Wähle nun eine beliebige Matrixnorm, zum Beispiel $\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$.
Zeige, dass dann Konstanten $K, \alpha > 0$ existieren, so dass

$$\|e^{At}\| \leq Ke^{-\alpha t} \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

gilt.
Wie groß kann α gewählt werden ?

Aufgabe 36:
Wir wollen das gedämpfte lineare Pendel

$$\ddot{x} + \nu\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

mit $\nu, \omega > 0$ und Anfangsbedingung $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ untersuchen.

(i) Bestimme für alle ν, ω^2 jeweils explizit die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems, zeichne Phasenportraits und skizziere in der (ν, ω)–Ebene Bereiche mit unterschiedlichem qualitativen Verhalten.

(ii) Wie ändert sich beim Übergang zwischen verschiedenen Zonen in der (ν, ω)– Ebene (z.B. bei Änderung der Dämpfung ν) das Phasenportrait ?
Treten dabei Unstetigkeiten der Jordan-Normalform bzw. des Phasenportraits auf ?