

1. Übungsblatt zur Vorlesung Verzweigungstheorie

ABGABE AM 25.10.2006 IN DER VORLESUNG

AUFGABE 1 (SCHRIFTLICH):

Beweise die folgende „diskrete Gronwall-Ungleichung“:

Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen, die für jedes $n \geq 1$ die Ungleichung

$$y_{n+1} \leq \alpha + \beta \sum_{k=1}^n y_k$$

erfüllen. Dann gilt für $n \geq 1$

$$y_{n+1} \leq (\alpha + \beta y_1) (1 + \beta)^{n-1}.$$

AUFGABE 2 (MÜNDLICH):

Beweise das Prinzip der linearisierten Stabilität für diskrete Dynamische Systeme:

Für einen C^1 -Diffeomorphismus $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $F(0) = 0$ ist $x = 0$ ein asymptotisch stabiler Fixpunkt, falls alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $A := DF(0)$ vom Betrag kleiner als Eins sind. Schreibe dazu

$$x_{n+1} = F(x_n) = Ax_n + G(x_n)$$

wobei A der Abschätzung $\|A^n\| \leq C\mu^n$ für ein $C > 0$ und ein $\mu \in (0, 1)$ genügt. Stelle dann eine diskrete Variation-der-Konstanten-Formel für die Lösung x_n auf und wende die diskrete Gronwall-Ungleichung aus Aufgabe 1 auf die Folge $y_n = \|x_n\| \cdot \mu^{-n}$ an.

AUFGABE 3 (SCHRIFTLICH):

Zeichne Spinnweben-Diagramme für die beiden Abbildungen $f_j : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit

(i) $f_1(x) = (x - \frac{1}{2})^2 + (1 + \lambda)x$ und

(ii) $f_2(x) = (x - \frac{1}{2})^3 + (1 + \lambda)x$

jeweils für $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ und $\lambda > 0$.

Völlig freiwillig: Schreibe zu diesem Zweck ein MATLAB-Programm, das zu einer gegebenen Intervallabbildung f das zugehörige „Spinnweben-Diagramm“ für eine vorgegebene Anzahl N von Iterationen plottet.

AUFGABE 4:

Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige, **bijektive** Intervallabbildung. Zeige:

- (i) Entweder es ist $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ oder es ist $f(0) = 1$ und $f(1) = 0$. Wieviele Fixpunkte besitzt f mindestens?
- (ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ lässt sich eine Funktion g mit $\|g\|_{C^0} < \varepsilon$ finden, so dass $f + g$ streng monoton ist und die Funktion $f(x) + g(x) - x$ nur endlich viele einfache Nullstellen besitzt.
- (iii) Beschreibe die Dynamik von f , falls $f(x) - x$ endlich viele einfache Nullstellen besitzt. Unterscheide dabei die beiden Fälle aus (i).

WWW-Seite zur Vorlesung:

<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>