

2. Übungsblatt zur Vorlesung Verzweigungstheorie

ABGABE AM 1.11.2006 IN DER VORLESUNG

AUFGABE 5:

Zeige durch Gegenbeispiele, dass der Satz von Sharkovskii weder für stetige Abbildungen der Kreislinie S^1 noch für stetige Abbildungen des Einheitsquadrats $[0, 1] \times [0, 1]$ gilt.

AUFGABE 6 (SCHRIFTLICH):

Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Intervallabbildung. Die Punkte $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ mit $n \geq 3$ erfüllen

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= f(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1 \\ x_1 &= f(x_n). \end{aligned}$$

Zeige, dass f dann periodische Punkte jeder (minimalen) Periode besitzt.

AUFGABE 7 (SCHRIFTLICH):

Sei $\Omega_2^+ = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge der einseitigen 0-1-Folgen versehen mit der Metrik d_2 aus der Vorlesung und σ der Bernoulli-Shift auf Ω_2^+ .

Zeige: Falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(x) = y$$

dann ist $y = (0, 0, 0, 0, \dots)$ oder $y = (1, 1, 1, 1, \dots)$.

Zeige, dass die stabile Menge von $(0, 0, 0, 0, \dots)$, die definiert ist als

$$M^s(0) := \{x \in \Omega_2; \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(x) = (0, 0, 0, 0, \dots)\}$$

dicht in Ω_2 , aber keine offene Teilmenge von Ω_2 ist.

AUFGABE 8:

Wir betrachten die symmetrische Zelt-Abbildung f mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} (1-x) & \text{für } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

- (i) Zeige, dass der Punkt $x = \frac{1}{2}$ auf einem periodischen Orbit liegt und berechne die anderen Punkte des Orbits.

Zeichne das zugehörige Spinnweben-Diagramm für diesen periodischen Orbit.

- (ii) Zeige, dass kein Orbit die Region $x > (1 + \sqrt{5})/4$ mehr als einmal trifft und dass ein Orbit, der die Region $x > (\sqrt{5} - 1)/4$ verlässt, dort nie wieder hingelangt.

Wohin werden Punkte aus dem Intervall $(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2})$ abgebildet?

- (iii) Wir kodieren nun Orbits $(x_1, f(x_1), f^2(x_1), \dots)$ durch eine L-R-Folge, je nachdem, ob $f^n(x)$ im Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ oder im Intervall $(\frac{1}{2}, 1]$ liegt.

Wie vielen *periodischen* Orbits wird eine Folge zugeordnet, in der die Teilfolge "LL" vorkommt?

Welche (periodischen) Folgen treten als Kodierung von *periodischen* Orbits auf?