J. HÄRTERICH, M. GEORGI
FU BERLIN
WINTERSEMESTER 2006/07

2. Übungsblatt zur Vorlesung Verzweigungstheorie

ABGABE AM 1.11.2006 IN DER VORLESUNG

AUFGABE 5:
Zeige durch Gegenbeispiele, dass der Satz von Sharkovskii weder für stetige Abbildungen der Kreislinie S^1 noch für stetige Abbildungen des Einheitsquadrats $[0,1]\times[0,1]$ gilt.

AUFGABE 6 (SCHRIFTLICH):
Sei $f:[0,1]\to[0,1]$ eine stetige Intervallabbildung. Die Punkte $x_1<x_2<\ldots<x_n$ mit $n\geq 3$ erfüllen

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= f(x_i), \quad i=1,\ldots,n-1 \\ x_1 &= f(x_n). \end{aligned}$$

Zeige, dass f dann periodische Punkte jeder (minimalen) Periode besitzt.

AUFGABE 7 (SCHRIFTLICH):
Sei $\Omega_2^+=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge der einseitigen 0-1-Folgen versehen mit der Metrik d_2 aus der Vorlesung und σ der Bernoulli-Shift auf Ω_2^+.
Zeige: Falls

$$\lim_{n\to\infty}\sigma^n(x)=y$$

dann ist $y=(0,0,0,0,\ldots)$ oder $y=(1,1,1,1,\ldots)$.
Zeige, dass die stabile Menge von $(0,0,0,0,\ldots)$, die definiert ist als

$$M^s(0):=\{x\in\Omega_2;\ \lim_{n\to\infty}\sigma^n(x)=(0,0,0,0,\ldots)\}$$

dicht in Ω_2, aber keine offene Teilmenge von Ω_2 ist.

AUFGABE 8:
Wir betrachten die symmetrische Zelt-Abbildung f mit

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,x & \text{für } 0\leq x\leq\frac{1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,(1-x) & \text{für } \frac{1}{2}<x\leq 1 \end{cases}$$

(i) Zeige, dass der Punkt $x=\frac{1}{2}$ auf einem periodischen Orbit liegt und berechne die anderen Punkte des Orbits.
Zeichne das zugehörige Spinnweben-Diagramm für diesen periodischen Orbit.

(ii) Zeige, dass kein Orbit die Region $x>(1+\sqrt{5})/4$ mehr als einmal trifft und dass ein Orbit, der die Region $x>(\sqrt{5}-1)/4$ verlässt, dort nie wieder hingelangt.
Wohin werden Punkte aus dem Intervall $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4},\frac{1}{2}\right)$ abgebildet ?

(iii) Wir kodieren nun Orbits $(x_1,f(x_1),f^2(x_1),\ldots)$ durch eine L-R-Folge, je nachdem, ob $f^n(x)$ im Intervall $[0,\frac{1}{2}]$ oder im Intervall $(\frac{1}{2},1]$ liegt.
Wie vielen *periodischen* Orbits wird eine Folge zugeordnet, in der die Teilfolge “LL” vorkommt ?
Welche (periodischen) Folgen treten als Kodierung von *periodischen* Orbits auf ?