J. HÄRTERICH, M. GEORGI
FU BERLIN
WINTERSEMESTER 2006/07

3. Übungsblatt zur Vorlesung Verzweigungstheorie

ABGABE AM 8.11.2006 IN DER VORLESUNG

AUFGABE 9 (SCHRIFTLICH):
Beweise den Satz über die *transkritische Verzweigung*.
Sei $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to [0,1]$ zweimal stetig differenzierbar und $f(0,\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei weiter $f_x(0,\lambda_0) = 1$ und $f_{\lambda x}(0,\lambda_0) > 0$ sowie $f_{xx}(0,\lambda_0) \neq 0$.
Zeige, dass dann für λ nahe λ_0 ein nicht-trivialer Zweig $x_F(\lambda)$ von Fixpunkten existiert mit $x_F(\lambda_0) = 0$. Bestimme außerdem $\frac{\mathrm{d}x_F}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda_0)$ und zeige, dass die Fixpunkte $x_F(\lambda)$ für $\lambda < \lambda_0$ instabil und für $\lambda > \lambda_0$ stabil sind.

AUFGABE 10 (SCHRIFTLICH):
Finde mit Computer-Unterstützung für das eindimensionale dynamische System

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda)$$

mit $f(\lambda, x) = \lambda \sin(\pi x)$ eine transkritische, sowie eine Flip-Verzweigung. Gib die Verzweigungspunkte auf zwei Nachkommastellen genau an und überprüfe, dass die notwendigen Bedingungen für die jeweilige Verzweigung im Rahmen der Rechengenauigkeit erfüllt sind.

AUFGABE 11 (SCHRIFTLICH): LJAPUNOV-SCHMIDT-REDUKTION
Sei $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $F(0,0) = 0$. Die Jacobi-Matrix $A := D_xF(0,0)$ habe einen algebraisch einfachen Eigenwert 0 mit zugehörigem Eigenvektor v_0.
Um weitere Lösungen von $F(x,\lambda) = 0$ in der Nähe von $(0,0)$ zu finden, kann man folgendermaßen vorgehen: Man wählt ein Komplement W zu dem von v_0 aufgespannten eindimensionalen Unterraum, so dass sich jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ eindeutig zerlegen lässt als

$$x = \alpha v_0 + w, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, w \in W.$$

Wir betrachten nun eine Projektion $P : \mathbb{R}^n \to \mathcal{R}(A)$. Die Gleichung $F(x,\lambda) = 0$ ist dann natürlich äquivalent zu

$$\begin{cases} PF(x,\lambda) &= 0 \\ (\mathrm{Id} - P)F(x,\lambda) &= 0 \end{cases}$$

(i) Zeige, dass die Gleichung $PF(\alpha v_0 + w, \lambda) = 0$ mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen nach w aufgelöst werden kann.
(ii) Gib eine Funktion $\tilde{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, so dass in einer Umgebung von $(0,0)$ die Lösungen der Gleichung $F(x,\lambda) = 0$ eindeutig den Lösungen der *reduzierten Gleichung* $\tilde{F}(\alpha,\lambda) = 0$ entsprechen.

AUFGABE 12:
Mit Hilfe der vorausgehenden Aufgabe soll nun ein Satz über die Saddle-Node-Verzweigung von Gleichgewichten in Differentialgleichungen

$$\dot{x} = F(x,\lambda), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

formuliert werden.
Sei daher $F(0,0) = 0$. Weiter habe die Jacobi-Matrix $D_xF(0,0)$ einen einfachen Eigenwert Null mit linkem Eigenvektor u_0^T und rechtem Eigenvektor v_0. Zeige, dass eine Saddle-Node-Verzweigung in der reduzierten Gleichung vorliegt, falls die beiden Bedingungen $u_0^T D_\lambda F(0,0) \neq 0$ und $u_0^T D_{xx}F(0,0)[v_0, v_0] \neq 0$ erfüllt sind.