4. Übungsblatt zur Vorlesung Verzweigungstheorie

ABGABE AM 15.11.2006 IN DER VORLESUNG

AUFGABE 13 (SCHRIFTLICH):
Berechnen Sie die Taylorentwicklung der stabilen Mannigfaltigkeit $W^s = \text{graph}(h)$ des Systems

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y^2 \\ y + x^3 \end{pmatrix}$$

bis inklusive vierter Ordnungsterme, d.h. berechnen Sie für $h(z) = az^2 + bz^3 + cz^4 + \mathcal{O}(5)$ die Koeffizienten a, b, c. Bestimmen Sie anschließend das reduzierte Vektorfeld. Wie sieht die lokale stabile Mannigfaltigkeit aus, eher wie eine Parabel oder wie eine kubische Funktion?

AUFGABE 14 (MÜNDLICH):
Betrachten Sie

$$\dot{x} = Ax + g(x),$$

mit $g(0) = g'(0) = 0$ und A hyperbolisch. Dann besitzt dieses System eine stabile Mannigfaltigkeit $W^s = \text{graph}(h)$, mit $h : E^s \to E^u$, und die reduzierte Dynamik ist durch

$$\dot{x}^s = Ax^s + Pg(x^s + h(x^s))$$

gegeben, wobei $P : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ die Projektion auf den stabilen Eigenraum E^s von A bezeichnet, d.h. Bild $P = E^s$. Zeigen Sie, dass jede Lösung $x^s(t)$ der reduzierten Gleichung via $x(t) = x^s(t) + h(x^s(t))$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung $\dot{x} = Ax + g(x)$ induziert.

AUFGABE 15 (MÜNDLICH):
Sei $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine einmal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^s : BC^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^N) &\to BC^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^N) \\ (\mathcal{T}^s x(\cdot))(t) &= e^{At} P x_0^s + \int_0^t e^{A(t-s)} P g(x(s)) ds \end{aligned}$$

eine differenzierbare Abbildung ist (wobei A und P wie in Aufgabe 13 sind und $x_0^s \in E^s$ ein fester Vektor ist).

Erinnerung: Eine Abbildung $F : X \to Y$, wobei X, Y Banachräume sind, heisst an der Stelle $u \in X$ differenzierbar, falls eine stetige lineare Abbildung $L : X \to Y$ existiert, so dass $F(u + \kappa) = F(u) + L\kappa + g(\kappa)$ für alle $\kappa \in X$ gilt und $g(\kappa)/|\kappa|_X \to 0$ für $\kappa \to 0$.

AUFGABE 16 (SCHRIFTLICH):
Zeigen Sie, dass die stabile Mannigfaltigkeit $W^s = \text{graph}(h)$, $h : E^s \to E^u$ bei $0 \in W^s$ tangential an E^s ist, d.h. es gilt $Dh(0) = 0$.

Hinweis: Nach Konstruktion der Abbildung $h : E^s \to E^u$ gilt $h(x_0^s) = (id - P)x^*(0)$ für die eindeutige Funktion $x^* \in BC^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^N)$, für die

$$x^*(t) = e^{At} P x_0^s + \int_0^t e^{A(t-s)} P g(x^*(s)) ds + \int_\infty^t e^{A(t-s)} (Id - P) g(x^*(s)) ds$$

gilt (und erneut sind A, g, P wie in den Aufgaben zuvor). Leiten Sie also diese Integralgleichung nach x_0^s an der Stelle $x_0^s = 0$ ab (für $x_0^s = 0$ ist $x^* \equiv 0$!). Vorsicht: Auch der Fixpunkt x^* selbst hängt von x_0^s ab!