5. Übungsblatt zur Vorlesung Verzweigungstheorie

ABGABE AM 22.11.2006 IN DER VORLESUNG

AUFGABE 17 (SCHRIFTLICH):
Zeige, dass das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -y \end{pmatrix}$$

unendlich viele Zentrumsmannigfaltigkeiten nahe $(x, y) = 0$ besitzt.

AUFGABE 18 (MÜNDLICH):
Zentrumsmannigfaltigkeiten wurden in der Vorlesung mit der Hilfe einer Kontraktion konstruiert, die einen eindeutigen Fixpunkt besitzt. Warum sind Zentrumsmannigfaltigkeiten in der Regel trotzdem nicht eindeutig (wie man an der vorigen Aufgabe sieht) ? Wo tritt diese Nichteindeutigkeit in dem in der Vorlesung geführten Beweis auf ?
Erkläre anschließend, warum diese Problematik bei der Konstruktion der lokalen stabilen Mannigfaltigkeit *nicht* auftritt und diese eindeutig ist.

AUFGABE 19 (MÜNDLICH):
Sei $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine *lineare* Abbildung mit spec$(A) \cap i\mathbb{R} = \{\pm i\omega\}$ für ein $\omega \neq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Seien weiterhin beide Eigenwerte algebraisch einfach. Was ist in diesem Fall die Zentrumsmannigfaltigkeit W^c, welche Dimension hat sie und was ist die reduzierte Dynamik auf W^c ?
Ist die Zentrumsmannigfaltigkeit in diesem Fall eindeutig ? Ändert sich daran etwas, wenn die Eigenwerte $\pm i\omega$ eine höhere algebraische Vielfachheit haben ?

AUFGABE 20 (SCHRIFTLICH):
Berechne die Taylorentwicklung der Zentrumsmannigfaltigkeit des Systems

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy \\ -y + x^2 - 2y^2 \end{pmatrix}$$

bis zu dritter Ordnung, d.h. mache den Ansatz $h(x) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \mathcal{O}(x^4)$ für die Zentrumsmannigfaltigkeit, berechne α, β, γ und bestimme anschließend das reduzierte Vektorfeld auf der Zentrumsmannigfaltigkeit bis inklusive vierter Ordnungsterme. Ist das Gleichgewicht $(x, y) = (0, 0)$ auf der Zentrumsmannigfaltigkeit stabil oder instabil?