J. HÄRTERICH, M. GEORGI
FU BERLIN
WINTERSEMESTER 2006/07

6. Übungsblatt zur Vorlesung Verzweigungstheorie

ABGABE AM 29.11.2006 IN DER VORLESUNG

AUFGABE 21 (SCHRIFTLICH):
Sei $H_2(\mathbb{R}^2)$ der Raum der Monome vom Grad 2 in 2 Variablen x, y, also

$$H_2(\mathbb{R}^2) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\}$$

Bestimme speziell für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ das Bild ad $A(H_2(\mathbb{R}^2))$ und gib ein Komplement dazu an.

AUFGABE 22:
Betrachte einen Diffeomorphismus $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $F(0) = 0$ und $DF(0) = A$. Sei weiter $\mathcal{L}_A\Phi(x) = A\Phi(x) - \Phi(Ax)$ und $\mathcal{L}_A^m$ die Einschränkung von $\mathcal{L}_A$ auf den Raum $H_m(\mathbb{R}^n)$. Um die Normalform von F zu bestimmen, sucht man Komplemente W_m, für die gilt:

$$H_m(\mathbb{R}^n) = \operatorname{Bild}(\mathcal{L}_A^m) \oplus W_m.$$

Zeige, dass

$$W_m = \operatorname{Kern}(\mathcal{L}_{A^T}^m)$$

eine mögliche Wahl ist.
Tipp: Zu zeigen ist ähnlich wie im kontinuierlichen Fall, dass $(\mathcal{L}_A^m)^* = \mathcal{L}_{A^T}^m$. Dazu lässt sich wieder das in der Vorlesung definierte Skalarprodukt für Monome verwenden.

AUFGABE 23 (SCHRIFTLICH):
Gib die Normalform 2. Ordnung an für eine Differentialgleichung an, deren Linearteil von der Form

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

ist mit $\mu \in \mathbb{R}$. Unterscheide dabei verschiedene Fälle.

AUFGABE 24:
Sei Γ eine Untergruppe der Gruppe $O(n)$ aller orthogonalen $n \times n$-Matrizen. Ein Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Γ-äquivariant, falls

$$f(\gamma x) = \gamma f(x) \qquad \text{für alle } \gamma \in \Gamma \text{ und alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Sei weiter $f(0) = 0$ eine Ruhelage.
Zeige, dass die invarianten Mannigfaltigkeiten $W^s(0)$, $W^u(0)$ und $W^c(0)$ alle Γ-invariant sind, d.h.

$$x \in W^s(0) \Rightarrow \gamma x \in W^s(0) \qquad \text{für alle } \gamma \in \Gamma\,, \text{ etc.}$$