4 Lokale Verzweigungen

Viele kontinuierliche oder diskrete dynamische Systeme hängen von einem Parameter λ ab.
Wir möchten untersuchen, wann sich die Dynamik „entscheidend“ verändert, wenn der Parameter λ variiert wird. Dazu brauchen wir zunächst einen sinnvollen Begriff, wann zwei dynamische Systeme sich “im wesentlichen” gleich verhalten.

Definition: Zwei dynamische Systeme Φ_t auf X und Ψ_t auf Y heißen *topologisch konjugiert* zueinander,falls es einen Homöomorphismus $h : X \to Y$, d.h. eine bijektive, stetige Abbildung mit stetiger Umkehrfunktion gibt, so dass

$$h(\Phi_t(x)) = \Psi_t(h(x)) \qquad \forall t, x.$$

Insbesondere werden Gleichgewichte/Fixpunkte/periodische Orbits von Φ_t unter h auf Gleichgewichte/Fixpunkte/periodische Orbits von Ψ_t abgebildet. Auch die (asymptotische) Stabilität der Gelichgewichte bzw. Fixpunkte bleibt erhalten.

Definition: Ein Punkt λ_0 heißt **Verzweigungspunkt** (Bifurkationspunkt), falls es in jeder Umgebung von λ_0 andere Punkte gibt, so dass das dynamische System dort nicht topologisch konjugiert ist zu dem Dynamischen System bei $\lambda = \lambda_0$.

Bemerkung: Wir werden uns in den nächsten Kapiteln immer mit der Situation beschäftigen, dass sich eine Umgebung von λ_0 in endlich viele Bereiche einteilen läßt, innerhalb derer alle Systeme topologisch konjugiert zueinander sind. Damit beschäftigt sich die Verzweigungstheorie. Eine solche Einteilung des Parameterraums in Bereiche mit gleichem Verhalten, stellt man oft als **Verzweigungsdiagramm** dar.
Es gibt aber auch Situationen, in denen in einer Umgebung von λ_0 unendlich viele topologische Typen vorkommen.

4.1 Verzweigung von stationären Lösungen in kontinuierlichen Systemen

Wir suchen Gleichgewichtslösungen der parameterabhängigen Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sei dazu $f \in C^2$ und $f(0,0) = 0$, d.h. für $\lambda = 0$ ist $x = 0$ ein Gleichgewicht. Falls nun die Jacobi-Matrix $D_x f(0,0)$ vollen Rang hat, dann gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen für $|\lambda|$ klein genug einen Zweig $x = x_*(\lambda)$ von Lösungen der Gleichung

$$f(x, \lambda) = 0.$$

Insbesondere existiert dann in einer Umgebung von $(0,0)$ für jedes λ genau ein Gleichgewicht $x_*(\lambda)$, das differenzierbar von λ abhängt.
Im Folgenden wollen wir uns mit der Situation beschäftigen, dass der Satz über implizite Funktionen in einem Gleichgewicht nicht direkt anwendbar ist. Insbesondere muss dazu die Matrix $D_x f(0,0)$ singulär sein.

4.1.1 Saddle–Node–Verzweigung

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall und untersuchen, was *typischerweise* passiert, wenn ein Gleichgewicht eine Linearisierung mit einem (algebraisch und geometrisch) einfachen Eigenwert 0 besitzt.
Betrachte dazu eine Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

die von einem Parameter λ abhängt. Weiter sei $f \in C^2$ mit $f(0,0) = 0$ und die Linearisierung besitze einen einfachen Eigenwert 0. Durch eine Koordinatentransformation $x = S\bar{x}$ kann man dann erreichen, dass die Linearisierung $S^{-1}D_x f(0,0)S$ in $x = \lambda = 0$ die Gestalt

$$S^{-1}D_x f(0,0)S = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\ \ldots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{B} \\ 0 & \end{array}\right)$$

hat, wobei alle Eigenwerte der Matrix B von 0 verschieden sind.
Setze dazu $x = S\bar{x}$ mit einer $n \times n$-Matrix S, deren erste Spalte der rechte Eigenvektor e_r von $D_x f(0,0)$ zum Eigenwert 0 ist, und deren restliche Spalten $b_2,\ b_3, \ldots, b_n$ so gewählt sind, dass der von $b_2, b_3, \ldots, b_n$ aufgespannte Unterraum in sich abgebildet wird. Die neue Koordinate $\bar{x}$ erfüllt dann die Differentialgleichung

$$\dot{\bar{x}} = S^{-1} f(S\bar{x}, \lambda) =: \bar{f}(x, \lambda)$$

Entsprechend zerlegt man $\bar{x} = (y, z)^T$ mit $y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}^{n-1}$, und setzt

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = S^{-1} D_\lambda \bar{f}(0,0).$$

Indem man z durch $\tilde{z} - \lambda B^{-1}\beta$ ersetzt, kann man erreichen, dass $\beta = 0$ ist.
Beachte, dass die erste Zeile der Matrix S^{-1} gerade der linke Eigenvektor e_ℓ^T von $Df(0,0)$ zum Eigenwert 0 ist. Insbesondere ist also $y = e_\ell^T x$ und $\alpha = e_\ell^T D_\lambda f(0,0)$.
Damit hat man die Gleichung in die folgende Form gebracht:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \alpha\lambda + g_1(y, z, \lambda) \\ \dot{\lambda} &= 0 \\ \dot{z} &= +Bz + g_2(y, z, \lambda) \end{aligned}$$

mit

$$g_1(y, z, \lambda),\ g_2(y, z, \lambda) = \mathcal{O}\left((|y| + |z| + |\lambda|)^2\right).$$

Die Linearisierung besitzt in $x = \lambda = 0$ einen doppelten Eigenwert 0. Lokal existiert also eine zweidimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit

$$W^c(0) = \{(y, \lambda, z);\ z = \phi(y, \lambda), (y, \lambda) \in U\}.$$

Dabei ist U eine Umgebung von 0 im $\mathbb{R}^2$. Die Zentrumsmannigfaltigkeit enthält insbesondere alle kleinen beschränkten Lösungen der ursprünglichen Gleichung, also Gleichgewichte, kleine periodische Orbits, etc.
Außerdem sind wegen $\dot\lambda = 0$ die Mengen $W^c(0) \cap \{\lambda = const.\}$ invariant.
Auf $W^c(0) \cap \{\lambda = const.\}$ erhält man die reduzierte Gleichung

$$\dot y = h(y,\lambda) := \alpha\lambda + g_1(y,\phi(y,\lambda),\lambda), \qquad y \in \mathbb{R}(!)$$

mit $h(0,0) = 0$, $h_y(0,0) = 0$ und $h_\lambda(0,0) = \alpha$.
Wir suchen nun Gleichgewichte, d.h. wir lösen $h(y,\lambda) = 0$. Um den Satz über implizite Funktionen anwenden zu können brauchen wir noch eine zusätzliche Bedingung: Falls

$$\alpha = h_\lambda(0,0) \neq 0,$$

dann existiert eine Kurve $\lambda = \lambda_*(y)$ von Gleichgewichten mit $\lambda_*(0) = 0$ und $\lambda_*'(0) = 0$, denn

$$\begin{aligned}
h(y,\lambda_*(y)) &= 0\\
h(y,\lambda_*(y)) &\equiv 0\\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} h(y,\lambda_*(y)) &= 0\\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} h(y,\lambda_*(y)) + \frac{\partial}{\partial\lambda} h(y,\lambda_*(y))\lambda_*'(y) &= 0\\
\Rightarrow \lambda_*'(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Falls außerdem noch die Bedingung

$$\gamma := h_{yy}(0,0) \neq 0$$

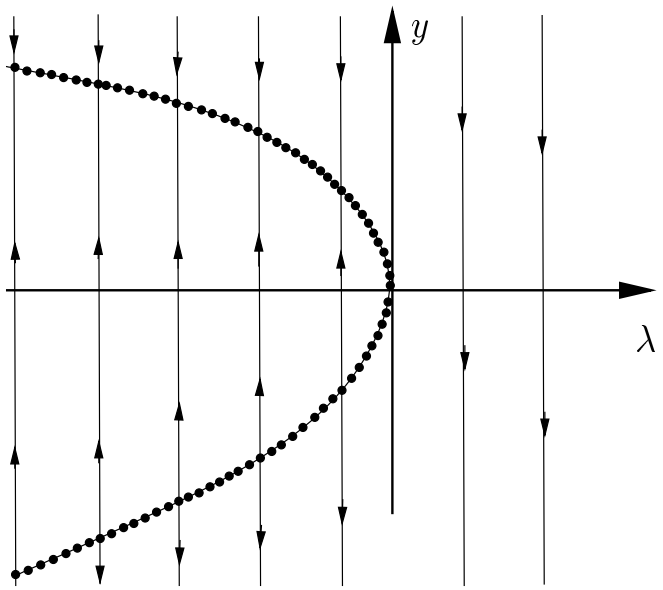
erfüllt ist, dann liegen alle Gleichgewichte in U entweder in der Halbebene $\{\lambda \le 0\}$ oder in $\{\lambda \ge 0\}$.
Um die Stabilität dieser Gleichgewichte zu bestimmen, berechnen wir noch den Eigenwert $h_y(y,\lambda_*(y))$ der Linearisierung.
Es ist

$$\frac{\partial}{\partial y} h_y(y,\lambda_*(y))\Big|_{y=0} = h_{yy}(0,0) + h_{y\lambda}(0,0)\cdot \underbrace{\lambda_*'(0)}_{=0} = \gamma,$$

d.h. der Eigenwert bewegt sich mit nicht-verschwindender Geschwindigkeit durch 0.
Für $\gamma < 0$ gilt dann, dass der Eigenwert positiv ist für $y < 0$, also ist für $y < 0$ das Gleichgewicht instabil, während es für $y > 0$ stabil ist.
Zuletzt berechnen wir noch die 2. Ableitung des Lösungszweigs im Punkt $(0,0)$:

$$\begin{aligned}
h(y,\lambda_*(y)) \equiv 0 \quad &\Longrightarrow \quad h_y(y,\lambda_*(y))h_\lambda(y,\lambda_*(y))\cdot\lambda_*'(y) = 0\\
&\Longrightarrow \quad h_{yy}(y,\lambda_*(y)) + 2h_{y\lambda}(y,\lambda_*(y))\cdot\lambda_*'(y)h_\lambda(y,\lambda_*(y))\cdot\lambda_*''(y)\\
&\Longrightarrow \quad \lambda_*''(0) = \frac{h_{yy}(0,0)}{h_\lambda(0,0)} = \frac{\gamma}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Indem man noch die beiden Koeffizienten α und γ in den ursprünglichen Koordinaten ausdrückt, erhält man das folgende Resultat:



Satz 4.1 (Saddle–Node–Verzweigung im $\mathbb{R}^n$)
Betrachte ein System von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

mit $f \in C^2$ und $f(0,0) = 0$. Außerdem besitze die Jacobi-Matrix $D_x f(0,0)$ einen einfachen Eigenwert 0 mit zugehörigem rechtem Eigenvektor e_r und linkem Eigenvektor e_ℓ
Weiter gelte im Verzweigungspunkt $x = 0$, $\lambda = 0$:

(i) $\alpha = e_\ell^T D_\lambda f(0,0) \neq 0,$

(ii) $\gamma = e_\ell^T D_x^2 f(0,0)[e_r, e_r] \neq 0.$

Dann existiert eine glatte Kurve von Gleichgewichten in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, die durch den Punkt $(0,0)$ verläuft und dort tangential an die Ebene $\lambda = 0$ ist.
Je nach Vorzeichen der Terme in (ii) und (iii) existieren dann entweder keine Gleichgewichte für $\lambda < 0$ und jeweils zwei Gleichgewichte für alle kleinen $\lambda > 0$ oder umgekehrt.
Sei k die Anzahl der Eigenwerte von $D_x f(0,0)$ mit negativem Realteil. Dann sind die beiden Gleichgewichte, die für festes $\lambda > 0$ bzw. $\lambda < 0$ existieren beide hyperbolisch. Eines der beiden besitzt eine k-dimensionale stabile Mannigfaltigkeit, das andere eine $(k+1)$–dimensionale stabile Mannigfaltigkeit. Die beiden Gleichgewichte sind durch einen heteroklinen Orbit miteinander verbunden.

Bemerkung:

1. Dabei ist

$$\gamma = e_\ell^T D_x^2 f(0,0)[e_r, e_r] = \sum_{i=1}^{n} e_{\ell i} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1} \frac{\partial^2 f_i(0,0)}{\partial x_j \partial x_k} e_{rj} e_{rk},$$

wobei

$$e_\ell = \begin{pmatrix} e_{\ell 1} \\ e_{\ell 2} \\ \vdots e_{\ell n} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e_r = \begin{pmatrix} e_{r1} \\ e_{r2} \\ \vdots e_{rn} \end{pmatrix}.$$

2. Die Bedingungen (i)–(ii) bedeuten genau, dass im Gleichgewicht $x = \lambda = 0$ eine zweidimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit existiert, auf der der reduziert Fluss die Form
$$\dot{x} = x^2 \pm \lambda + \mathcal{O}(x^3 + \lambda^2 + x\lambda)$$
hat.

3. Der Name Saddle-Node-Verzweigung wird verständlicher, wenn man $n = 2$ betrachtet. In diesem Fall „erscheinen“ gleichzeitig zwei Gleichgewichte: Ein Sattel und ein sogenannter Knoten (Linearisierung besitzt zwei reelle Eigenwerte gleichen Vorzeichens).

4. Die Menge der Vektorfelder $f(x, \lambda)$, die die Bedingungen (i)–(iii) erfüllen, ist offen und dicht im Raum der Einparameterfamilien glatter Vektorfelder mit einem Gleichgewicht $(0, 0)$, das einen Eigenwert 0 besitzt. In diesem Sinne ist die Saddle-Node-Verzweigung das typische Verhalten beim Auftreten eines Eigenwerts 0.

Beispiel: Für das Wachstum einer Pflanzenart bei kontinuierlicher und gleichbleibender Ernte E kann man das folgende einfache Modell für die Populationsdichte U betrachten:

$$\dot{U} = U(1 - U) - E$$

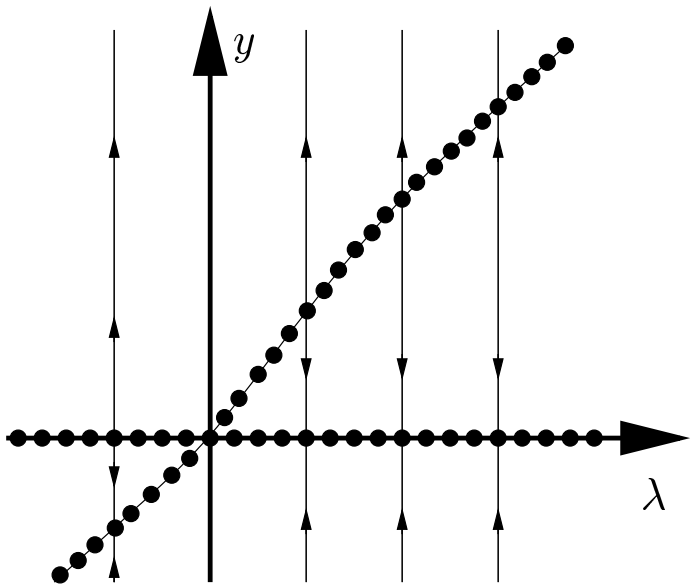
Man findet leicht heraus, dass bei $E = 0.25$ und $U = 0.5$ eine Saddle-Node-Verzweigung stattfindet, wobei für $E > 0.25$ keine Gleichgewichte existieren. Für $E < 0.25$ existieren zwei Gleichgewichte $0 < U_-(E) < U_+(E) < 1$, von denen das größere stabil ist.
Interpretation: Falls $E > 0.25$ oder $E \in [0, 0.25]$ und $U(0) < U_-(E)$, dann wird durch das Ernten die Spezies vernichtet (sogar in endlicher Zeit). Falls $E \in [0, 0.25]$ und $U(0) > U_+(E)$, dann stellt sich ein Gleichgewicht ein, das allerdings kleiner ist als ohne Ernte.

4.1.2 Transkritische Verzweigung

Es kann vorkommen, dass (aus physikalischen, biologischen oder völlig anderen Gründen) die Bedingungen für Saddle–Node–Verzweigungen in einem System nicht erfüllt sein kann. Beispielsweise kann eine Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, \lambda)$$

einen Zweig $\{(x_*(\lambda), \lambda);\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ von Gleichgewichten besitzen. (Oft ist in Anwendungen $x = 0$ eine Ruhelage für alle Werte des Parameters.) Entlang dieses Zweigs kann natürlich keine Saddle-Node-Verzweigung auftreten, da für jedes λ ja mindestens eine Ruhelage existiert.
Durch eine einfache Translation $x \mapsto x - x_*(\lambda)$ kann man erreichen, dass $f(0, \lambda) \equiv 0$.



Solange $D_x f(0,\lambda)$ nicht singulär ist, gibt es lokal nahe $(0,\lambda)$ genau einen Zweig von Lösungen, den trivialen Lösungszweig.
Wir nehmen daher an, dass $D_x f(0,0)$ einen einfachen Eigenwert 0 besitzt und untersuchen, was dann passiert.
Genau wie bei der Saddle-node-Verzweigung können wir durch eine lineare Koordinatentransformation erreichen, dass

$$D_x f(0,0) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\ \ldots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{B} \\ 0 & \end{array}\right)$$

mit einer regulären Matrix B. Wie oben zerlegen wir $x = (y,z)$ mit $y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}^{n-1}$. Wenn man nun noch die Gleichung $\dot{\lambda} = 0$ hinzufügt, erhält man wieder eine zweidimensionale lokale Zentrumsmannigfaltigkeit bei $x = \lambda = 0$. Die reduzierte Gleichung auf dieser Zentrumsmannigfaltigkeit lautet

$$\begin{aligned} \dot{y} &= y(\alpha\lambda + \beta y + g(y,\lambda)) \\ \dot{\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

wobei

$$g(y,\lambda) = \mathcal{O}\left((|y| + |\lambda|)^2\right)$$

Wie oben zeigt man dann, dass für $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$ ein Ast nichttrivialer Lösungen $y = y_*(\lambda)$ durch $(0,0)$ verläuft mit $y_*'(0) = -\frac{\alpha}{\beta}$. Die Stabilität beider Äste wechselt bei $\lambda = 0$.

Satz 4.2 (Transkritische Verzweigung im $\mathbb{R}^n$)

Betrachte ein System von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

mit $f(0, \lambda) = 0$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$.
Es gelte im Verzweigungspunkt $x = 0,\ \lambda = 0$*:*

(i) $D_x f(0,0)$ *besitzt einen einfachen Eigenwert* 0 *mit zugehörigem rechtem Eigenvektor* e_r *und linkem Eigenvektor* e_ℓ,

(ii) $D^2_{\lambda x} f(0,0) e_r \neq 0$,

(iii) $e_\ell D^2_x f(0,0)[e_r, e_r] \neq 0$.

Dann existiert eine glatte Kurve $x = x_*(\lambda)$ *von Gleichgewichten in* $\mathbb{R}^n$ *mit* $x_*(0) = 0$ *und* $x'_*(0) = -\frac{e_\ell D^2_x f(0,0)[e_r,e_r]}{???}$.
Für alle λ *existieren jeweils zwei Gleichgewichte.*
Für jedes feste λ *sind diese beiden Gleichgewichte durch einen heteroklinen Orbit miteinander verbunden.*

Beispiel: Schockprofile Wir betrachten ein System von Erhaltungssätzen

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon u_{xx}, x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{1}$$

und suchen Travelling-wave Lösungen dieser Gleichung für $\varepsilon > 0$.
Dabei sollen die folgenden Voraussetzungen an f gelten:

1. Die Jacobi-Matrix $Df(u)$ besitzt für jedes $u \in \mathbb{R}^n$ n verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \ldots < \lambda_n(u)$ (*strikte Hyperbolizität*).
2. Sei $r_k(u)$ der zum Eigenwerte $\lambda_k(u)$ gehörende Eigenvektor. Dann ist $\nabla\lambda_k(u) \cdot r_k(u) \neq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ (*genuine Nichtlinearität*).

Der Travelling-wave Ansatz

$$u(x,t) = U\left(\frac{x - st}{\varepsilon}\right)$$

führt auf die Gleichung

$$(Df(U) - s \cdot \mathrm{Id})\dot{U} = \ddot{U},$$

wobei der Punkt die Ableitung nach der neuen „Zeit“ $\xi := \frac{x-st}{\varepsilon}$ bedeutet. Integriert man diese Gleichung einmal, so erhält man die Differentialgleichung

$$\dot{U} = f(U) - sU - C$$

mit einer Integrationskonstanten $C \in \mathbb{R}^n$. Gleichgewichte erfüllen dann die Gleichung

$$f(U) - sU - C = 0$$

Wähle nun $U_\ell \in \mathbb{R}^n$ beliebig und setze $C = f(U_\ell) - sU_\ell$, dann ist (U_ℓ, s) für alle Wellengeschwindigkeiten $s \in \mathbb{R}$ ein Gleichgewicht. Die Linearisierung $Df(U_\ell) - s \cdot \mathrm{Id}$ in diesem

Gleichgewicht ist genau dann singulär, wenn s mit einem der Eigenwerte $\lambda_k(U_\ell)$ übereinstimmt.
Wir zeigen jetzt, dass in diesem Fall für die resultierende Differentialgleichung

$$\dot{U} = f(U) - sU - f(U_\ell) + sU_\ell \tag{2}$$

eine transkritische Verzweigung vorliegt. Es gilt nämlich:

Satz 4.3 (Schockprofile) *Betrachte ein System viskoser Erhaltungsgleichungen*

$$u_t + f(u)_x = u_{xx}$$

Für ein U_ℓ sei die Jacobi-Matrix $Df(U_\ell)$ strikt hyperbolisch mit Eigenwerten $\lambda_1(U_\ell) < \lambda_2(U_\ell) < \ldots < \lambda_n(U_\ell)$ und zughörigen Eigenvektoren $r_1(U_\ell), r_2(U_\ell), \ldots, r_n(U_\ell)$. Falls für den Eigenwert $\lambda_k(U_\ell)$ die Bedingung

$$\nabla\lambda_k(U_\ell) \cdot r_k(U_\ell) \neq 0$$

erfüllt ist, so gibt es eine stetige Kurve $U_R(\rho)$ mit $0 < \rho < \rho_0$ und eine stetige Funktion $s(\rho)$, so dass

$$U_R(0) = U_\ell, \quad s(0) = \lambda_k(U_\ell) =: s_0$$

mit der Eigenschaft, dass für $s = s(\rho)$ eine heterokliner Lösung $U(\xi)$ von (2) mit

$$\lim_{\xi\to-\infty} U(\xi) = U_\ell, \quad \lim_{\xi\to+\infty} U(\xi) = U_R$$

existiert.

Bemerkung: Formal konvergiert Gleichung (1) für $\varepsilon \searrow 0$ gegen die hyperbolischen Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0$$

Die Traveling-wave-Lösungen aus dem Satz „konvergieren“ gegen unstetige Lösungen dieser Gleichung, sogenannte „Schocks“. Da der kleine Term εu_{xx} in der Gasdynamik der Viskosität von Gasen entspricht, spricht man bei $\varepsilon \searrow 0$ vom Limes verschwindender Viskosität. Aus diesem Grund heißen die heterokline Orbits *viskose Schockprofile*.

Beweis: Das erweiterte System

$$\begin{aligned}\dot{U} &= f(U) - sU - f(U_\ell) + sU_\ell \dot{s} \\ \dot{s} &= 0\end{aligned}$$

besitzt in (U_ℓ, s_0) eine Linearisierung mit doppeltem Eigenwert 0. Der zugehörige Eigenraum wird aufgespannt von den Vektoren $(r_k(U_\ell), 0)^T$ und $(0, 1)^T$.
Daher existiert eine zweidimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit $W_c(U_\ell)$ der Form

$$W_c(U_\ell) = \{U;\ U = U_\ell + \alpha r_k(u_\ell) + \Psi(\alpha, s),\ \alpha \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}\}$$

wobei $\Psi(0,0) = 0$ und $D\Psi(0,0) = 0$.
Um die reduzierte Gleichung auf der Zentrumsmannigfaltigkeit untersuchen zu können, müssen wir zunächst ein paar Nebenrechnungen durchführen.

1. Seien $\ell_k(U)$ die linken Eigenvektoren von $DF(U)$ zum Eigenwert $\lambda_k(U)$, so normiert, dass
$$\ell_j^T(U) \cdot r_k(U) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{for } j \neq k \\ 1 & \text{for } j = k \end{cases}$$
Dann ist $(\ell_j^T(U) \cdot v) r_j(U)$ die Projektion auf den von $r_j(U)$ aufgespannten Unterraum, denn für $v = \sum_k c_k r_k(U)$ ist
$$\ell_j^T(U) \cdot v = \sum_k c_k \ell_j^T(U) \cdot r_k(U) = c_j.$$

2. Durch Differentiation der Gleichung $\ell_k^T(U) \cdot r_k(U) = 1$ erhält man
$$\begin{aligned} D(\ell_k^T(U) \cdot r_k(U)) &= 0 \\ \Leftrightarrow D\ell_k^T(U) \cdot r_k(U) + \ell_k^T(U) \cdot Dr_k(U) &= 0. \end{aligned}$$

3. Da $\ell_k^T(U)$ und $r_k(U)$ Eigenvektoren sind, gilt
$$\ell_k^T(U) Df(U) r_k(U) = \ell_k^T(U) \lambda_k(U) r_k(U) = \lambda_k(U) \ell_k^T(U) \cdot r_k(U) = \lambda_k(U).$$
Wiederum durch Differenzieren und durch Ausnutzen von 2) zeigt man, dass
$$\begin{aligned} D\left(\ell_k^T(U) Df(U) r_k(U)\right) &= \nabla \lambda_k(U) \\ \Leftrightarrow D\ell_k^T(U) Df(U) r_k(U) + \ell_k^T(U) D^2 f(U) r_k(U) + \ell_k^T(U) Df(U) Dr_k(U) &= \nabla \lambda_k(U) \\ \Leftrightarrow \lambda_k(U) \left(D\ell_k^T(U) r_k(U) + \ell_k^T(U) Df(U) Dr_k(U)\right) + \ell_k^T(U) D^2 f(U) r_k(U) &= \nabla \lambda_k(U) \\ \Leftrightarrow \ell_k^T(U) D^2 f(U) r_k(U) &= \nabla \lambda_k(U). \end{aligned}$$
Hierbei kann man sich $D^2 f(U)$ vorstellen als einen „Vektor“, dessen Einträge die Hesse-Matrizen $D^2 f_i(U)$ der einzelnen Komponenten von f sind.

Um nun die reduzierte Gleichung auf $W^c(U_\ell)$ zu bestimmen, entwickeln wir jede Komponente in eine Taylor-Reihe um $U = U_\ell$ bis zu Termen quadratischer Ordnung:
$$f(U) = f(U_\ell) + Df(U_\ell) \cdot (U - U_\ell) + \frac{1}{2} D^2 f(U_\ell)(U - U_\ell)^2 + \dots$$
Auf der Zentrumsmannigfaltigkeit ist
$$U - U_\ell = \alpha r_k(U_\ell) + \Psi(\alpha, s)$$
wobei
$$\Psi(\alpha, s) = \mathcal{O}\left((|\alpha| + |s - s_0|)^2\right).$$
Die reduzierte Gleichung erhält man nun, indem man

- in der ursprünglichen Differentialgleichung U durch $U_\ell + \alpha r_k(U_\ell) + \Psi(\alpha, s)$ ersetzt und
- den Anteil in Richtung $r_k(U_\ell)$ bestimmt.

Letzteres geht, wie wir oben gesehen haben, durch Multiplikation mit ℓ^T.

$$\begin{aligned} & \ell_k^T(U_\ell)\cdot(f(U)-f(U_\ell)-s(U-U_\ell)) \\ = \;& \ell_k^T(U_\ell)\cdot\left(Df(U_\ell)(U-U_\ell)+\frac{1}{2}D^2f(U_\ell)(U-U_\ell)^2-s(U-U_\ell)+\mathcal{O}(|U-U_\ell|^3)\right) \\ = \;& \ell_k^T(U_\ell)\cdot\left((s-s_0)\alpha r_k(U_\ell)+\frac{1}{2}D^2f(U_\ell)\alpha^2 r_k(U_\ell)+\mathcal{O}((|\alpha|+|s-s_0|)^3)\right) \end{aligned}$$

Als reduzierte Gleichung auf der Zentrumsmannigfaltigkeit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= \alpha(s-s_0)+\frac{1}{2}\left(\nabla\lambda_k(U_\ell)\cdot r_k(U_\ell)\right)\alpha^2+\mathcal{O}((|\alpha|+|s-s_0|)^3) \\ \dot s &= 0 \end{aligned}$$

Wegen der genuinen Nichtlinearität der Erhaltungsgleichung ist $\nabla\lambda_k(U_\ell)\cdot r_k(U_\ell)\neq 0$, es liegt also eine transkritische Verzweigung vor. Innerhalb der Zentrumsmannigfaltigkeit existiert daher ein Zweig nichttrivialer Ruhelagen sowie eine Familie von heteroklinen Lösungen zwischen U_ℓ und diesen Ruhelagen. □

4.1.3 Pitchfork–Verzweigung

Eine Saddle-Node-Verzweigung kann auch nicht auftreten, wenn ein dynamisches System bestimmte Symmetrien aufweist. Das wichtigste Beispiel hierzu ist die Spiegelsymmetrie. Betrachte hierzu eine Differentialgleichung

$$\dot x = f(x,\lambda),\quad x\in\mathbb{R}^n,\lambda\in\mathbb{R}$$

mit $f\in C^3$ und der Symmetrie $f(-x,\lambda)=-f(x,\lambda)$. Daraus folgt sofort, dass $f(0,\lambda)=0$ für alle λ, also kann auch hier keine Saddle-Node-Verzweigung auftreten.
Falls die Linearisierung in $x=0$ für ein λ einen einfachen Eigenwert 0 besitzt, dann lässt sich durch eine lineare Koordinatentransformation $x=S\bar x$ wieder erreichen, dass

$$S^{-1}D_xf(0,0)S=\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\ldots0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{B} \\ 0 & \end{array}\right)$$

mit einer nicht-singulären Matrix B. Die neue Variable $\bar x$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\dot{\bar x}=\tilde f(\bar x,\lambda)=S^{-1}f(Sx,\lambda).$$

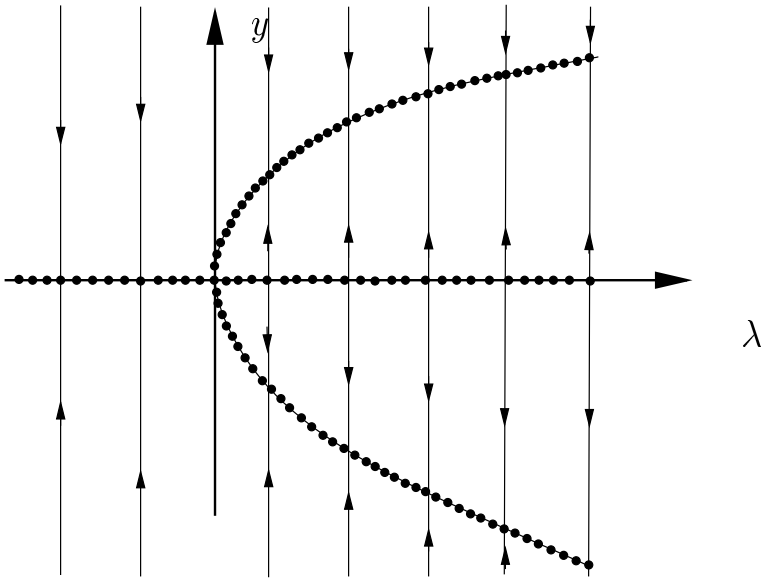
Man beachte, dass die Symmetrie erhalten bleibt: $\tilde f(-y,\lambda)=-\tilde f(y,\lambda)$.
Es existiert wieder eine zweidimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit für die erweiterte Gleichung mit

$$\begin{aligned} \dot x &= f(x,\lambda),\quad x\in\mathbb{R}^n,\lambda\in\mathbb{R} \\ \dot\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Die ersten Terme der Normalform lauten wegen der Symmetrie von f:

$$\dot{y} = \beta\lambda y - \delta y^3$$

Wenn $\beta\delta \neq 0$, dann liegt eine sogenannte *Pitchfork–Verzweigung* vor. Das Phasenportrait auf der Zentrumsamnnigfaltigkeit sieht im Fall β, $\delta > 0$ wie folgt aus.



Für andere Vorzeichen von β und δ muss man Pfeile umkehren, bzw. an der λ-Achse spiegeln.
Es gilt daher der folgende

Satz 4.4 (Pitchfork–Verzweigung)
Betrachte ein System von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

mit der Symmetrie $f(-x, \lambda) = -f(x, \lambda)$. Damit ist $f(0, \lambda) = 0$ für alle λ. Weiter besitze die Jacobi-Matrix $D_x f(0, 0)$ einen einfachen Eigenwert 0.
Falls für die reduzierte Differentialgleichung

$$\dot{y} = \tilde{f}(y, \lambda), \quad y \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

auf der Zentrumsmannigfaltigkeit die Bedingungen

(i) $D^2_{y\lambda}\tilde{f}(0, 0) \neq 0$,

(ii) $D^3_y\tilde{f}(0, 0) \neq 0$

erfüllt sind, dann existiert eine glatte Kurve von nichttrivialen Gleichgewichten in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, die durch den Punkt $(0, 0)$ verläuft und dort tangential an die Ebene $\lambda = 0$ ist.
Je nach Vorzeichen der Terme in (ii) und (iii) existieren dann entweder ein Gleichgewicht für $\lambda < 0$ und jeweils drei Gleichgewichte für alle kleinen $\lambda > 0$ oder umgekehrt.

Der Beweis verläuft ganz analog zum Fall der Saddle-Node-Verzweigung. Man muss allerdings zeigen, dass die Gleichung auf der Zentrumsmannigfaltigkeit und auch die Normalform die Symmetrie von f erben, d.h. dass (siehe Übungsaufgabe).

4.2 Die Hopf-Verzweigung

Wir untersuchen in diesem Kapitel, was passiert, wenn sich die Stabilität eines Gleichgewichts ändert, indem zwei komplex konjugierte Eigenwerte der Linearsierung über die imaginäre Achse wandern.
Dazu betrachten wir eine Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

mit $f(0, \lambda) = 0$. Die Linearisierung in $x = \lambda = 0$ besitze die beiden imaginären Eigenwerte $\pm i\omega$ und keine weiteren Eigenwerte auf der imaginären Achse. Für das erweiterte System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \lambda) \\ \dot{\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

existiert also eine dreidimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit $W^c(0, 0)$ zum Gleichgewicht $x = \lambda = 0$. Wählt man Koordinaten y_1 y_2 im Eigenraum zu den Eigenwerten $\pm i\omega$, dann lautet die reduzierte Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \tilde{f}(y, \lambda) \\ \dot{\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

$\tilde{f}(0, 0) = 0$ und

$$D_y \tilde{f}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Normalform von $\tilde{f}$ haben wir bereits im vorigen Kapitel berechnet, sie lautet bis zur 3. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= -\omega y_2 + \alpha_1(y_1^2 + y_2^2)y_1 - \beta_1(y_1^2 + y_2^2)y_2 + \dots \\ \dot{y_2} &= \omega y_1 + \beta_1(y_1^2 + y_2^2)y_1 + \alpha_1(y_1^2 + y_2^2)y_2 + \dots \end{aligned}$$

mit Koeffizienten α_1 und β_1.
Eine ähnliche Normalformberechnung kann man auch durchführen, wenn die Differentialgleichung noch von einem Parameter λ abhängt. Wir nehmen an, dass die Linearisierung in $x = 0$ die Matrix

$$D_y \tilde{f}(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha_0(\lambda) & -\beta_0(\lambda) \\ \beta_0(\lambda) & \alpha_0(\lambda) \end{pmatrix}.$$

ist, wobei $\alpha_0(0) = 0$ und $\beta_0(0) = \omega$.
Als Normalform 3. Ordnung erhält man dann

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= \alpha_0(\lambda)y_1 - \beta_0(\lambda)y_2 + \alpha_1(\lambda)(y_1^2 + y_2^2)y_1 - \beta_1(\lambda)(y_1^2 + y_2^2)y_2 \\ \dot{y_2} &= \beta_0(\lambda)y_1 + \alpha_0(\lambda)y_2 + \beta_1(\lambda)y_1^2 + y_2^2)y_1 + \alpha_1(\lambda)(y_1^2 + y_2^2)y_2. \end{aligned}$$

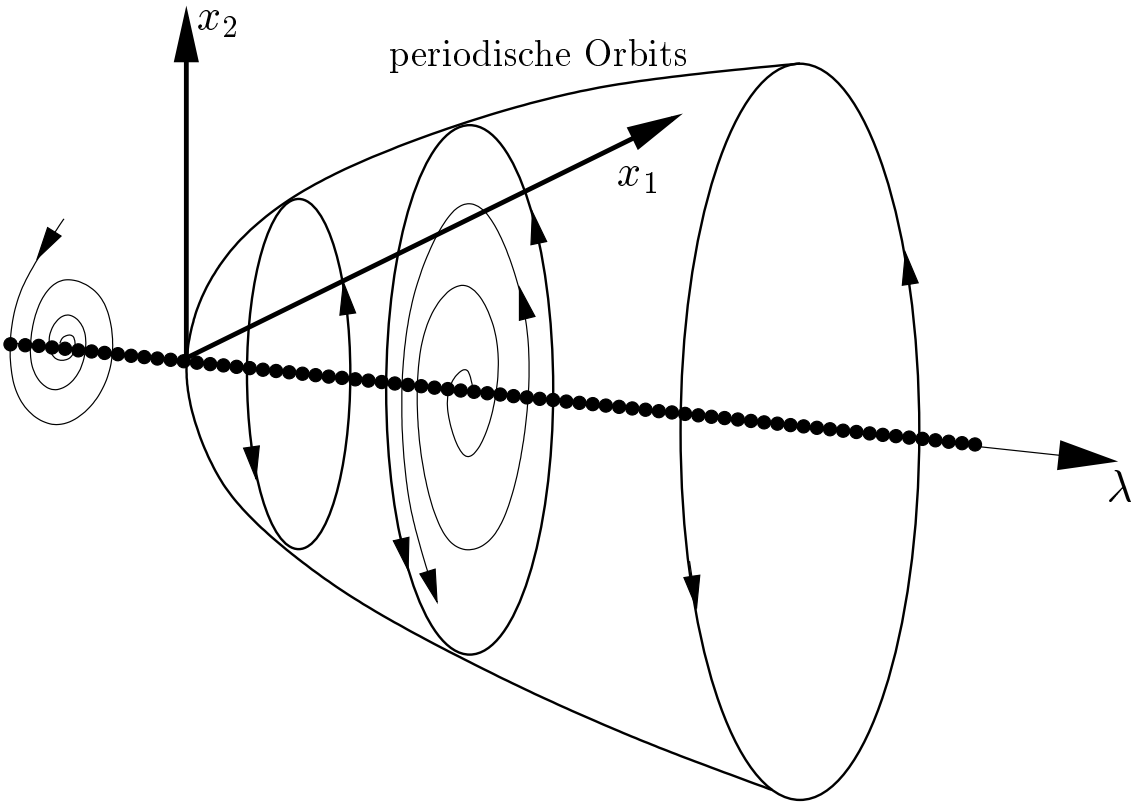
Die Dynamik dieser Differentialgleichung lässt sich am besten untersuchen, wenn man zu Polarkoordinaten übergeht. Mit $y_1 = r\cos\phi$, $y_2 = r\sin\phi$ lauten die Differentialgleichungen dann

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha_0(\lambda)r + \alpha_1(\lambda)r^3 + R_1(r, \phi, \lambda) =: g_1(r, \phi, \lambda) \\ \dot{\phi} &= \beta_0(\lambda) + \beta_1(\lambda)r^2 + R_2(r, \phi, \lambda) =: g_2(r, \phi, \lambda) \end{aligned}$$

Die r-Gleichung ist unabhängig von ϕ, sie „entkoppelt “. Außerdem ist sie symmetrisch, denn $g_1(-r, \phi, \lambda) = -g_1(r, \phi, \lambda)$. Man prüft leicht nach, dass in $(0,0)$ die Voraussetzungen für eine Pitchfork-Verzweigung erfüllt sind, falls $\alpha_0'(0) \neq 0$ und $\alpha_1(0) \neq 0$. Entweder für $\lambda > 0$ oder für $\lambda < 0$ treten also zwei neue Gleichgewichte

$$r_\pm \approx \pm\sqrt{\frac{\alpha_0'(0)}{\alpha_1(0)}\lambda}$$

auf.
Außerdem ist für $|\lambda|$, r klein $\dot{\phi} \approx \beta_0(0) = 1$, die neuen Gleichgewichte der r-Gleichung entsprechen also einem periodischen Orbit des gesamten Systems. Das Verzweigungsdiagramm sieht also (für $\alpha_0'(0) > 0$ und $\alpha_1(0) > 0$) wie in Abbildung 4.2 aus.



Man kann nun zeigen, dass dieses Bild erhalten bleibt, wenn man die volle Gleichung untersucht und nicht nur die Terme der Normalform 3. Ordnung berücksichtigt. Insgesamt erhält man damit folgenden Satz:

Satz 4.5 (Hopf-Verzweigung) *Betrachte ein System*

$$\dot{y} = \tilde{f}(y, \lambda), \quad y \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

mit $\tilde{f}(0, \lambda) \equiv 0$.
Weiter besitze $D_y\tilde{f}(0,0)$ *ein einfaches Paar imaginärer Eigenwerte und keine weiteren Eigenwerte auf der imaginären Achse. Diese Eigenwerte lassen sich für* λ *nahe* 0 *fortsetzen als* $\alpha(\lambda) \pm \beta(\lambda)i$ *mit* $\alpha(0) = 0$ *und* $\beta(0) \neq 0$.
Außerdem gelte:

(i) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\alpha(0) \neq 0$ *und*

(ii) $\alpha_1(0) \neq 0$, *wobei* α_1 *der kubische Term in der Normalform von* $\tilde{f}$ *ist (siehe oben).*

Dann existiert eine Familie von periodischen Lösungen in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, *die durch den Punkt* $(0,0)$ *verläuft und dort tangential an die Ebene* $\lambda = 0$ *ist. Die Amplitude ist von der Ordnung* $\mathcal{O}(\sqrt{|\lambda|})$.
Es existieren dann entweder keine (kleinen) periodischen Orbits für $\lambda < 0$ *oder für* $\lambda > 0$.
Das Gleichgewicht $x = 0$ *wechselt bei* $\lambda = 0$ *seine Stabilität.*

Beweis: Wir wollen eine Poincare-Abbildung der x_1-Achse in sich konstruieren, deren Fixpunkte gerade periodische Orbits unserer Differentialgleichung sind. Da $\beta_0(0) = \omega > 0$ ist für hinreichend kleine r und $|\lambda|$ immer noch $g_2(r, \phi, \lambda) > 0$, wir können Trajektorien also über dem Winkel ϕ parametrisieren. Die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} = \frac{g_1(r,\phi,\lambda)}{g_2(r,\phi,\lambda)} =: h(r,\phi,\lambda). \tag{3}$$

Wegen $h(0,\phi,0) = 0$ existiert die Lösung mit Anfangswert $r(0) = 0$ für alle Zeiten. Wegen der stetigen Abhängigkeit der Lösung von Parametern und Anfangsbedingungen existiert zumindest für hinreichend kleine r und kleine $||lambda|$ eine Lösung von (3) auf dem Intervall $\phi \in [0, 2\pi]$.
Wir nennen die Lösung von (3) mit Anfangswert $\phi(0) = \rho$ nun $\tilde{r}(\phi; \rho, \lambda)$ und setzen

$$P(\rho, \lambda) = \tilde{r}(2\pi; \rho, \lambda).$$

Periodische Lösungen unserer ursprünglichen Differentialgleichung entsprechen nun Fixpunkten von P mit $\rho > 0$.
Offensichtlich ist $P(0, \lambda) = 0$ für alle λ, da $x = 0$ eine Ruhelage der ursprünglichen Differentialgleichung ist. Daher können wir

$$P(\rho, \lambda) = \rho \cdot P_1(\rho, \lambda)$$

schreiben und suchen nun Punkte, die die Gleichung

$$P_1(\rho, \lambda) - 1 = 0 \tag{4}$$

erfüllen. Dazu möchten wir den Satz über implizite Funktionen benutzen. Zunächst ist

$$\frac{\partial}{\partial\rho}P(\rho,\lambda) = P_1(\rho,\lambda) + \rho\frac{\partial}{\partial\rho}P_1(\rho,\lambda)$$

Für $\rho = 0$ erhält man daraus die Identität

$$P_1(0,\lambda) = \frac{\partial}{\partial\rho}P(0,\lambda) = \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{r}(2\pi;\rho,\lambda)$$

Wir müssen also die Ableitung von $\tilde{r}$ nach dem Anfangswert ρ bestimmen.
Wegen $\tilde{r}(\phi; 0, \lambda) \equiv 0$ ist die Abbildung

$$\phi \mapsto D_\rho\tilde{r}(\phi; 0, \lambda)$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{du}{d\phi} = D_r h(0,\phi,\lambda)u = \frac{\alpha_0(\lambda)}{\beta_0(\lambda)}u$$

mit der Anfangsbedingung $u(0) = 1$. Dann ist aber $P_1(0,\lambda)$ gerade

$$P_1(0,\lambda) = u(2\pi) = e^{2\pi\frac{\alpha_0(\lambda)}{\beta_0(\lambda)}}.$$

Daraus ergibt sich zum einen $P(0,0) - 1 = 0$, d.h. $\rho = \lambda = 0$ ist eine Lösung von (4). Andererseits ist

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}P_1(0,0) = 2\pi\alpha_0'(0) \neq 0$$

nach Voraussetzung (i). Der Satz über implizite Funktionen besagt daher, dass ein Zweig $\lambda = \lambda_*(\rho)$ von Lösungen der Gleichung (4) nahe $\rho = 0$ existiert mit $\lambda_*(0) = 0$. Weiter zeigt man noch, dass $\lambda_*'(0) = 0$ und dass aus Bedingung (ii) $\lambda_*''(0) \neq 0$ folgt. Damit haben wir entweder für alle kleinen $\lambda > 0$ oder für alle $\lambda < 0$ einen periodischen Orbit nahe $x = 0$ gefunden. □

Bemerkung:

1. Aus der Differentialgleichung in Polarkoordinaten lässt sich die Periode der verzweigenden periodischen Lösungen bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} &= \beta_0(\lambda) + \beta_1(\lambda)\tilde{r}^2 + R_2(\tilde{r}(\phi),\phi,\lambda)\\ \Rightarrow T &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\beta_0(\lambda) + \beta_1(\lambda)\tilde{r}(\phi)^2 + R_2(\tilde{r}(\phi),\phi,\lambda)}\end{aligned}$$

2. Im allgemeinen wird man den Satz über die Hopf-Verzweigung auf die reduzierte Gleichung nach einer Zentrumsmannigfaltigkeits-Reduktion anwenden. Bedingung (i) lässt sich dabei leicht überprüfen, wenn man die Eigenvektoren zu den imaginären Eigenwerten kennt. Schwieriger ist die Verifikation von Bedingung (ii), denn hierfür muss nicht nur ein Normalform-Koeffizient berechnet werden, sondern auch die quadratischen Terme in der Taylor-Entwicklung der Zentrums-Mannigfaltigkeit. Man wird daher sehr oft Anwendungen des Hopf-Satzes finden, bei denen diese Bedingung nicht überprüft wird.

3. Für ein System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega y + f(x,y)\\ \dot{y} &= \omega x + g(x,y)\end{aligned}$$

im $\mathbb{R}^2$ bzw. nach Reduktion auf die zweidimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit lässt sich der kubische Koeffizient $\alpha_1(0)$ der Normalform berechnen als

$$\begin{aligned}\alpha_1(0) &= \frac{1}{16}\left(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}\right)\\ &\quad + \frac{1}{16\omega}\left(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}\right).\end{aligned}$$

Diesen Koeffizienten erhält man, indem man die ersten Terme in der Taylor-Entwicklung der Normalform-Transformation explizit berechnet und dann durch die Ableitungen von f und g darstellt. Diese Rechnung findet man beispielsweise in den Büchern von [Guckenheimer & Holmes] und [Glendinning].

Beispiel: Brüsselator

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{k_1} X \\ B + X &\xrightarrow{k_2} Y + D \\ 2X + Y &\xrightarrow{k_3} 3X \\ X &\xrightarrow{k_4} E \end{aligned}$$

mit Massenwirkungskinetik. Die Konzentratione der Stoffe A und B werden (durch Zufuhr, Puffern,...) konstant gehalten, die Stoffe D und E treten nur als Produkte auf, reagieren aber nicht weiter, ihre Konzentration ist daher nicht von Bedeutung. Es müssen also nur die Konzentrationen von X und Y bestimmt werden. Nach geeigneten Skalierungen $x = \sqrt{k_3/k_4}X$, $y = \sqrt{k_3/k_4}Y$, $\tau = k_4 t$,... erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a - bx + x^2 y - x \\ \dot{y} &= bx - x^2 y \end{aligned}$$

mit positiven Parametern $a, b > 0$. Es existiert ein nichttriviales Gleichgewicht $(x_*, y_*) = (a, \frac{b}{a})$. Die Eigenwerte der Linearisierung in (x_*, y_*) sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(b - a^2 - 1 \pm \sqrt{(b - a^2 - 1)^2 - 4a^2}\right).$$

Die Eigenwerte sind rein imaginär, wenn $b = a^2 + 1$. In diesem Fall ist $\lambda_{1,2} = \pm ai$.
Wir halten nun a fest und betrachten b als unseren veränderlichen Parameter. Wir möchten zeigen, dass bei $b_* = a^2 + 1$ eine Hopf-Verzweigung mit $\omega = a$ stattfindet.
Der Realteil der Eigenwerte der Linearisierung in (x_*, y_*) ist $\alpha_0(b) = \frac{b - a^2 - 1}{2}$, es gilt also $\alpha_0'(b_*) \neq 0$.
Für den kubischen Koeffizienten $\alpha_1(0)$ ergibt die Darstellungsformel

$$\alpha_1(b_*) = -\frac{1}{8} + \frac{(a^2 + 1)^2}{16a^3}.$$

Hier fehlen noch die zugehörigen Phasenportraits !