J. Härterich, M. Georgi
FU Berlin
Wintersemester 2006/07

7. Übungsblatt zur Vorlesung Verzweigungstheorie

Abgabe am 06.12.2006 in der Vorlesung

Aufgabe 25 (schriftlich):

Sei $P = (P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x))^T$ ein Vektorpolynom in $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Zeige:

$$P(e^{A^T t}x) = e^{A^T t}P(x) \qquad \forall x, t$$

ist äquivalent zu

$$DP(x)A^T x = A^T P(x) \qquad \forall x.$$

Aufgabe 26 (schriftlich):

Transformiere die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - y + x^3 + xy^2 - 2x^2 y - 2y^3 \\ \dot{y} &= x + \alpha y + 2x^3 + 2xy^2 + x^2 y + y^3 \end{aligned}$$

auf komplexe Koordinaten $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ sowie auf Polarkoordinaten (r, ϕ) mit $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$.
Skizziere die Phasenportraits für $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ und für $\alpha > 0$.

Aufgabe 27: Entfaltung der transkritischen Verzweigung

Ein einfaches Populationsmodell hat die Form

$$\dot{x} = \lambda x - x^2,$$

wobei x die Bevölkerungsdichte darstellt.
Zeige, dass bei $\lambda = 0$ eine transkritische Verzweigung vorliegt. Um Zu- oder Wegzug zu modellieren, betrachten wir nun die modifizierte Gleichung

$$\dot{x} = \lambda x - x^2 + \alpha$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Gibt es für $\alpha \neq 0$ immer noch eine transkritische Verzweigung ?

Aufgabe 28: $\mathbb{Z}_3$-äquivariantes Vektorfeld

Sei

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

die Familie der Drehmatrizen. Konstruiere ein Vektorfeld f in der Ebene, das mit den Drehungen $R_{\frac{2\pi}{3}}$ und $R_{\frac{4\pi}{3}}$ kommutiert, aber nicht mit Drehungen R_ϕ für $\phi \notin \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$.
Überprüfe das Ergebnis durch Simulation mit `DSTOOL` o.ä.