J. Härterich, M. Georgi
FU Berlin
Wintersemester 2006/07

8. Übungsblatt zur Vorlesung Verzweigungstheorie

Abgabe am 13.12.2006 in der Vorlesung

Aufgabe 29:
Untersuche die Langford-Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\lambda-1)x - y + xz\\ \dot{y} &= x + (\lambda-1)y + yz\\ \dot{z} &= \lambda z - (x^2+y^2+z^2)\end{aligned}$$

auf stationäre und Hopf-Verzweigungen.

Aufgabe 30 (schriftlich):
Um einen Pfad stationärer Lösungen numerisch zu verfolgen, d.h. um Lösungen einer Gleichung $f(x,\lambda)=0$ zu finden, kann man sich der sogenannten Pseudo-Bogenlängenfortsetzung bedienen. Ausgehend von zwei bekannten Lösungspunkten $X_{n-1} := (x_{n-1}, \lambda_{n-1})$ und $X_n := (x_n, \lambda_n)$ macht man zunächst einen *Prädiktorschritt* der Länge h in Richtung $X_n - X_{n-1}$. Von diesem Punkt Y_n aus startet man ein Newton-Verfahren, um einen neuen Lösungspunkt X_{n+1} zu erhalten (*Korrektorschritt*).
Für dieses Newton-Verfahren benötigt man eine weitere Bedingung/Gleichung (Warum ?).
Beim Pseudo-Bogenlängenverfahren verlangt man als zusätzliche Bedingung, dass die Vektoren $X_n - X_{n-1}$ und $Y_n - X_{n+1}$ orthogonal zueinander sind.
Skizziere die geometrische Situation und leite Ausdrücke für den Punkt Y_n aus dem Prädiktorschritt und für die Gleichung, die mit Hilfe des Newton-Verfahrens gelöst werden soll, her.

Aufgabe 31 (schriftlich):
Schreibe ein `MATLAB`-Programm, das die Kurve der Gleichgewichte der Differentialgleichung

$$\dot{x} = xe^{-x} - \lambda$$

ausgehend vom Punkt $(x_0, \lambda_0) = (0,0)$ verfolgt (beispielsweise mit Hilfe des Verfahrens aus der vorhergehenden Aufgabe) und die Kurve der Gleichgewichte plottet.

Aufgabe 32:
Untersuche die Entfaltung der Takens-Bogdanov-Verzweigung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= \lambda_1 + \lambda_2 y + xy + x^2\end{aligned}$$

auf Verzweigungen. Wähle zunächst λ_1 fest und betrachte λ_2 als Parameter.
Versuche danach mit `DSTOOL` herauszufinden, welche invarianten Mengen in der Nähe der Ruhelage $x=y=0$ existieren können.