

9. Übungsblatt zur Vorlesung Verzweigungstheorie

ABGABE AM 20.12.2006 IN DER VORLESUNG

AUFGABE 33:

Man stelle sich vor, dass man mit Hilfe eines numerischen Verfahrens einen Pfad von Gleichgewichtslösungen $(x_*(\rho), \lambda_*(\rho))$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$$

verfolgt. Um Hopf-Verzweigungen zu entdecken, muss man zunächst die Gleichgewichte finden, für die die Linearisierung $A(\rho) := D_x f((x_*(\rho), \lambda_*(\rho)))$ rein imaginäre Eigenwerte hat.

Was machen die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Linearisierung, wenn zwei Eigenwerte die imaginäre Achse kreuzen?

Denke Dir eine Methode aus, um rein imaginäre Eigenwerte entlang dieses Zweigs (numerisch) zu erkennen, **ohne** alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix zu berechnen.

AUFGABE 34 (SCHRIFTLICH):

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $f(x, \lambda)$ habe eine Saddle-Node-Verzweigung in $x = 0, \lambda = 0$, d.h. es sei $f(0, 0) = 0, f_x(0, 0) = 0, f_\lambda(0, 0) \neq 0$ und $f_{xx}(0, 0) \neq 0$.

Sei $g \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine weitere Funktion. Zeige:

(i) Falls $\|f - g\|_{C^2}$ klein genug ist, dann hat auch g eine Saddle-Node-Verzweigung nahe $x = \lambda = 0$.

Es gibt g mit $\|f - g\|_{C^1}$ beliebig klein, so dass $g(x, \lambda) = 0$ für gewisse Werte von λ mehr als zwei Lösungen hat.

AUFGABE 35 (SCHRIFTLICH):

Untersuche mit Hilfe einer Zentrumsmanigfaltigkeits-Reduktion in der Lorenz-Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

die Verzweigung des Gleichgewichts $x = y = z = 0$ bei $\rho = 1$ für feste Parameter $\beta = \frac{8}{3}, \sigma = 10$.

AUFGABE 36 (HOPF-HOPF):

Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^4, \mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Es sei $f(0, 0) = 0$ und die Linearisierung $D_x f(0, 0)$ besitze zwei Paare einfacher, rein imaginärer Eigenwerte $\pm\omega_1 i, \pm\omega_2 i$, mit

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0 \text{ für alle ganzen Zahlen } k_1, k_2 \text{ mit } 0 < |k_1| + |k_2| \leq 4.$$

Bestimme für $\mu_1 = \mu_2 = 0$ die Normalform bis zur kubischen Ordnung.

Es empfiehlt sich, wie bei der Hopf-Verzweigung in komplexen Koordinaten zu arbeiten.

Nimm nun an, dass die Normalform-Koeffizienten von μ abhängen und entwickle in eine Taylor-Reihe bezüglich μ_1 und μ_2 . Gib eine abgeschnittene Normalform an, die nur Terme bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\mu|w|, |w|^3)$ enthält.

Transformiere diese abgeschnittene Normalform auf Polarkoordinaten $(r_1, \phi_1, r_2, \phi_2)$.

Freiwillig: Untersuche mit Hilfe von DSTOOL die Dynamik der Differentialgleichungen für r_1 und r_2 zu betrachten.