J. HÄRTERICH, M. GEORGI
FU BERLIN
WINTERSEMESTER 2006/07

10. Übungsblatt zur Vorlesung Verzweigungstheorie

ABGABE AM 17.01.2007 IN DER VORLESUNG

AUFGABE 37 (MÜNDLICH):
Betrachte die folgende Abbildung

$$x \mapsto x + \mu + \varepsilon \cos(2\pi x) = f(x, \mu, \varepsilon), \qquad x, \mu \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \geq 0.$$

Indem wir Punkte miteinander identifizieren, die ganzzahligen Abstand besitzen, können wir uns f als Abbildung auf der S^1 vorstellen. Zeige, dass f für alle Parameterwerte μ, ε einen 2-periodischen Orbit besitzt, wenn die Parameter ε, μ in der (μ, ε)-Ebene innerhalb der zwei Kurven

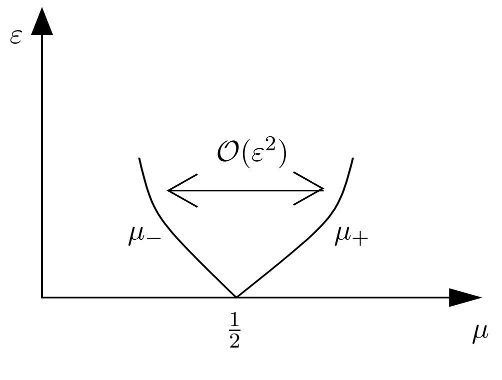
$$\mu_+ = \frac{1}{2} + \varepsilon^2 \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \qquad \mu_- = \frac{1}{2} - \varepsilon^2 \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

begrenzten Region liegen und ε klein ist (siehe Abbildung).

Hinweis: Falls

$$f^2(x, \mu, \varepsilon) - x - 1 =: G(x, \mu, \varepsilon) = 0,$$

so besitzt f einen 2-periodischen Punkt hat. Nach dem impliziten Funktionensatz existiert nun eine Kurve $\mu = \mu(x, \varepsilon)$, so dass $G(x, \mu(x, \varepsilon), \varepsilon) = 0$. Berechne nun die ersten beiden Koeffizienten der Taylorentwicklung von μ bezüglich ε.



AUFGABE 38 (SCHRIFTLICH):
Sei $p(t)$ eine nichttriviale T-periodische Lösung einer Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Diese Differentialgleichung induziert einen Fluss $\Phi(t, x)$. Für $x_0 = p(0)$ sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Poincaréschnitt, d.h. es gilt

$$\Gamma \oplus \langle f(x_0) \rangle = \mathbb{R}^n.$$

Ausserdem existiert eine lokal definierte Poincaréabbildung $\Pi : x_0 + \Gamma \to x_0 + \Gamma$. Zeige, dass die Eigenwerte der Abbildung $D\Pi(x_0)$ mit den nichttrivialen Floquetmultiplikatoren übereinstimmen, falls Γ invariant unter $D_x\Phi(T, x_0)$ ist. (Mit dem „trivialen" Floquetmultiplikator ist hier die 1 gemeint, die immer ein Eigenwert von $D_x\Phi(T, x_0)$ ist).

Erinnerung: Es sei an die Definition der Poincaréabbildung erinnert: Bezeichne mit $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor, so dass $\langle x, h \rangle = 0$ genau dann gilt, wenn $x \in \Gamma$. Man kann nun die Funktion

$$\begin{aligned} k &: \Gamma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ k &: (x,t) \mapsto \langle x - \Phi(t,x), h \rangle \end{aligned}$$

betrachten. Diese Abbildung ist Null für $(x,t) = (x_0, T)$. Nach dem impliziten Funktionensatz existiert dann eine Abbildung $\tau(x)$ mit $\tau(x_0) = T$ und $k(x, \tau(x)) = 0$ und wir definieren lokal $\Pi(x) := \Phi(\tau(x), x)$.

AUFGABE 39 (SCHRIFTLICH):
Betrachte eine Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),$$

mit $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$ und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Berechne die Rotationszahl $\rho(\Phi_t)$ des Flusses Φ_t für jedes $t \in \mathbb{R}$.