J. HÄRTERICH, M. GEORGI
FU BERLIN
WINTERSEMESTER 2006/07

11. Übungsblatt zur Vorlesung Verzweigungstheorie

ABGABE AM 24.01.2007 IN DER VORLESUNG

AUFGABE 40 (MÜNDLICH):
Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Sei $p(t)$ eine 1-periodische Lösung für $\alpha = 0$.

a) Nimm an, dass $|\mu| \neq 1$ für alle nichttrivialen Floquetmultiplikatoren μ der Gleichung $\dot{y} = D_x f(p(t), 0) y(t)$ gilt. Zeige, dass dann (1) auch für α nahe Null einen periodischen Orbit besitzt.

b) Beschreibe ein Szenario, in dem der periodische Orbit für $\alpha > 0$ nicht mehr existiert.

AUFGABE 41 (SCHRIFTLICH):
Betrachte die nichtautonome Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\delta y + f(x, t, \alpha), \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $f(0, t, \alpha) = 0$ und $f(x, t + 1, \alpha) = f(x, t, \alpha)$ für alle $t, x, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt. Außerdem sei $y \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ eine Konstante. Für das erweiterte System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\delta y + f(x, t, \alpha) \\ \dot{t} &= 1 \end{aligned} \tag{3}$$

auf dem Phasenraum $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$ ist $\Gamma = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^2 \times S^1\}$ ein globaler Poincaréschnitt für (3) mit zugehöriger Poincaréabbildung

$$\begin{aligned} \Pi &: \Gamma \to \Gamma \\ \Pi &: (x, y, 0) \to (\Phi_T(x, y, 0)), \end{aligned}$$

wobei Φ_t den Fluss von (3) bezeichnet.

a) Sei $H(x, y, t) := \frac{y^2}{2} - \int_0^x f(z, t, \alpha) dz$. Zeige, dass

$$H(\Pi^n(x, y, 0)) \to 0$$

für $n \to \infty$ und $(x, y, 0) \in \Gamma$.

b) Folgere daraus, dass für das diskrete System $z_{n+1} = \Pi z_n$, $z_n \in \Gamma$, in dem Fixpunkt $z = (0, 0, 0) \in \Gamma$ für $\alpha \approx 0$ keine Neimark-Sacker Verzweigung stattfinden kann.

AUFGABE 42 (SCHRIFTLICH):
Betrachte Hill's-Gleichung

$$\ddot{x}(t) + \beta(t)x(t) = 0,$$

wobei $\beta(t)$ eine skalare, 1-periodische Funktion ist und $\beta(a) > c > 0$ für ein $c > 0$ und alle t gilt.
Zeige, dass alle Floquetmultiplikatoren μ Nullstellen der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 - (w_1(1) + w_2'(1)) \cdot \lambda + 1 = 0$$

sind, wobei $w_1(t)$ und $w_2(t)$ Lösungen der Hill's Gleichung mit

$$w_1(0) = 1, w_1'(0) = 0, \quad \text{und} \quad w_2(0) = 0, w_2'(0) = 1$$

sind.

Hinweis:
Benutze den Satz von Liouville aus Dynamische Systeme I.

AUFGABE 43 (MÜNDLICH):
Betrachte eine planare Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und sei $p(t)$ eine nichtriviale 1-periodische Lösung. Sei

$$\triangle := \int_0^1 \text{spur}(Df(p(s)))ds.$$

Zeige, dass der periodische Orbit von p genau dann stabil ist, wenn $\triangle < 0$ ist.

Hinweis:
Benutze den Satz von Liouville aus Dynamische Systeme I.