J. HÄRTERICH, M. GEORGI
FU BERLIN
WINTERSEMESTER 2006/07

12. Übungsblatt zur Vorlesung Verzweigungstheorie

ABGABE AM 31.01.2007 IN DER VORLESUNG

AUFGABE 44 (MÜNDLICH):
Betrachte eine Abbildung

$$f : Q := [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2,$$

die alle Voraussetzungen des Satzes 7.1 (Smale's Hufeisen, C^0-Version) aus der Vorlesung erfüllt. Insebsondere existiert also eine invariante Menge $\Lambda \subset Q$, auf der f konjugiert zum Bernoulli-Shift σ auf zwei Symbolen ist. Zeige, dass der 2-periodische Orbit zum Anfangswert

$$(\ldots, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$$

bezüglich σ tatsächlich einen 2-periodischen Orbit von f entspricht.

AUFGABE 45 (SCHRIFTLICH):
Sei f wie in Aufgabe 44. Es wurde in der Vorlesung gezeigt, dass dann die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} &\to \Lambda \\ \Psi^{-1}((s_k)_k) &= x, \end{aligned}$$

bijektiv ist, wobei $x \in Q$ den eindeutigen Punkt bezeichnet, für den $f^k(x) \in V_{s_k}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt (und hierbei bezeichnen V_0, V_1 die beiden vertikalen Streifen aus Satz 7.1). Zeige, dass Ψ (also die Umkehrabbildung von Ψ^{-1}) stetig ist.

AUFGABE 46 (SCHRIFTLICH):
Erfülle $f : Q \to \mathbb{R}^2$ alle Voraussetzungen von Theorem 7.4 (Smale's Hufeisen, C^1-Version) und bezeichne wieder Λ die invariante Menge, bezüglich derer f konjugiert zum Bernoulli-Shift auf zwei Symbolen ist. Zeige, dass für jedes $g \in BC^1(Q, \mathbb{R}^2)$ mit

$$\|g - f\|_{BC^1} = \sup |f(x) - g(x)| + \sup |f'(x) - g'(x)| < \varepsilon$$

eine bezüglich g invariante Kantormenge Λ_ε existiert, so dass $f\big|_\Lambda$ und $g\big|_{\Lambda_\varepsilon}$ topologisch konjugiert sind, falls ε klein genug ist.

(„Topologisch konjugiert“ bedeutet, dass ein Homöomorphismus $\Psi : \Lambda \to \Lambda_\varepsilon$ existiert, so dass $g \circ \Psi = \Psi \circ f$ gilt.)

AUFGABE 47 (MÜNDLICH):
Bei welcher der beiden “Büroklammerabbildungen” kann Shift–Dynamik auftreten ?