J. HÄRTERICH, M. GEORGI
FU BERLIN
WINTERSEMESTER 2006/07

13. Übungsblatt zur Vorlesung Verzweigungstheorie

ABGABE AM 07.02.2007 IN DER VORLESUNG

AUFGABE 48 (SCHRIFTLICH):
Finde graphisch ein Hufeisen für die Henon-Abbildung

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - a x_n^2 + b y_n \\ y_{n+1} &= x_n \end{aligned}$$

mit $a \gg 1$ und $0 < b \ll 1$. Sind die Bedingungen für den C^1-Hufeisensatz erfüllt ?

AUFGABE 49 (SCHRIFTLICH):
Untersuche mit `DSTOOL` den angeregten Oszillator

$$\ddot{x} + k\dot{x} - x + 4x^3 = A\cos(\omega t)$$

für $k = 0.154$, $\omega = 1.2199778$ und $A \in [0.05, 0.2]$
Betrachte dazu eine geeignete Rückkehrabbildung (mittels `Poincare Section`) und beginne erst nach einigen hundert Iterationen zu plotten, um das Langzeitverhalten korrekt zu erfassen.
Was ist zu beobachten ?
Versuche, Deine Beobachtung mit Hilfe der Werkzeuge aus der Vorlesung (Poincaré-Abbildung, Floquetmultiplikatoren, Zentrumsmannigfaltigkeit) zu erklären.

AUFGABE 50:
Als Rückkehrabbildung $P_{loc} : \Pi_0 \to \Pi_1$ in der Nähe eines homoklinen Orbits q vom Shilnikov-Typ hatten wir in der Vorlesung den Ausdruck

$$\Pi_{loc}(x_{in}, z_{in}) = (x_{out}, y_{out}) = \begin{pmatrix} x_{in} \left(\frac{\varepsilon}{z_{in}}\right)^{\mu/\varrho} (\cos(\frac{\omega}{\mu}) \log \frac{\varepsilon}{z_{in}}) \\ x_{in} \left(\frac{\varepsilon}{z_{in}}\right)^{\mu/\varrho} (\sin(\frac{\omega}{\mu}) \log \frac{\varepsilon}{z_{in}}) \end{pmatrix}$$

berechnet. Nimm nun an, dass das System von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängt, so dass die globale Rückkehrabbildung $P_{glob} : \Pi_1 \to \Pi_0$ die Form

$$P_{glob}(x, y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \bar{x} + ax + bz + \lambda\alpha \\ 0 \\ cx + dy + \lambda\beta \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $a, b, c, d, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ hat, während λ die Abbildung P_0 nicht beeinflusst. Wie in der Vorlesung existiere für $\lambda = 0$ ein homokliner Orbit, der Π_0 im Punkt $(\bar{x}, 0, 0)$ schneidet.
Zeige, dass für λ nahe Null (endlich viele) Smalesche Hufeisen in der Rückkehrabbildung $P_{ges} = P_1 \circ P_0$ existieren.

AUFGABE 51:
Untersuche die Rückkehrabbildung $P_{glob} \circ P_{loc}$ für λ nahe 0 auf periodische Punkte.
Was kann man über die Stabilität periodischer Orbits in Abhängigkeit von $\frac{\mu}{\varrho}$ sagen ?
Untersuche, ob es Parameterwerte geben kann, für die homokline Orbits existieren, die dem Orbit q zweimal folgen, bevor sie gegen 0 konvergieren.