

Kernfragen zur Analysis

VI. Metrische Räume

1. Was ist eine Metrik? Gib außerdem drei verschiedene Beispiele!
2. Wie sind offene Teilmengen eines metrischen Raumes definiert, wie abgeschlossene Teilmengen?
3. Sind $\left\{ \begin{array}{l} \text{endliche} \\ \text{abzählbare} \\ \text{beliebige} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Durchschnitte} \\ \text{Vereinigungen} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{offener} \\ \text{abgeschlossener} \end{array} \right\}$ Mengen wieder offen bzw. abgeschlossen?
4. Wie sind Abschluss, Inneres und Rand einer Teilmenge eines metrischen Raumes definiert?
5. Was sind Abschluss, Inneres und Rand folgender Teilmengen der reellen Zahlen (mit deren Standardmetrik)?

$$\mathbb{Z}; \quad \mathbb{Q}; \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right).$$

6. Wann ist eine Teilmenge eines metrischen Raumes dicht?
7. Wann ist ein metrischer Raum zusammenhängend? Gib außerdem je ein Beispiel eines zusammenhängenden und eines nicht zusammenhängenden Raumes!
8. Wie sind Zusammenhangskomponenten eines metrischen Raumes definiert? Wann heißt ein metrischer Raum total unzusammenhängend?
9. Sind $\left\{ \begin{array}{l} \text{endliche} \\ \text{abzählbare} \\ \text{beliebige} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Durchschnitte} \\ \text{Vereinigungen} \end{array} \right\}$ zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängend?
10. Wann ist ein metrischer Raum kompakt? Gib wenigstens 2 verschiedene (aber natürlich äquivalente) Definitionen! Gib außerdem je ein Beispiel eines kompakten und eines nicht kompakten Raumes!
11. Sind $\left\{ \begin{array}{l} \text{endliche} \\ \text{abzählbare} \\ \text{beliebige} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Durchschnitte} \\ \text{Vereinigungen} \end{array} \right\}$ kompakter Mengen wieder kompakt?
12. Was versteht man unter einer Cantor-Menge? Gib außerdem ein Beispiel an!
13. Wie lautet der Satz von Baire?
14. Was sind generische Mengen? Was sind magere Mengen?

15. Wann heißt eine Folge in einem metrischen Raum konvergent? Wann heißt sie Cauchy-Folge?
16. Warum ist in einem metrischen Raum jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge? (Beweise!)
17. Wann heißt ein metrischer Raum vollständig?
18. Wann heißt eine Abbildung zwischen metrischen Räumen stetig? Gib wenigstens 2 verschiedene (aber natürlich äquivalente) Definitionen!
19. Sind unter einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen die

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bilder} \\ \text{Urbilder} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{offener} \\ \text{abgeschlossener} \\ \text{zusammenhängender} \\ \text{kompakter} \end{array} \right\} \text{ Teilmengen wieder } \left\{ \begin{array}{l} \text{offen} \\ \text{abgeschlossen} \\ \text{zusammenhängend} \\ \text{kompakt} \end{array} \right\} ?$$
20. Wann heißen zwei Metriken äquivalent?
21. Was bedeutet die Äquivalenz durch Normen induzierter Metriken für diese Normen?
22. Sei X ein metrischer Raum. Formuliere und beweise den Zwischenwertsatz für stetige Abbildungen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.
23. Wie lassen sich die kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^n charakterisieren?
24. Wie lautet der Satz von Arzela-Ascoli?
25. Wie lautet der Banachsche Fixpunktsatz?