Kernfragen zur Analysis

VII. Differentiation im Banachraum

(Teil 1)

1. Wann heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Banachräumen X und Y Fréchet-differenzierbar? Was ist die Fréchet-Ableitung von f ?
2. Ist eine Fréchet-differenzierbare Abbildung f zwischen Banachräumen immer stetig?
3. Was sind die Gateaux-Ableitungen einer Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Banachräumen X und Y ?
4. Was sind die partiellen Ableitungen einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?
5. Wie lässt sich die Fréchet-Ableitung einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch ihre partiellen Ableitungen ausdrücken?
6. Was ist die Ableitung des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ im Hilbertraum H ?
7. Was ist der Gradient der Abbildung $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_2^{-1}$, wobei $\| \cdot \|_2$ die euklidische Norm bezeichnet?
8. Wie lautet die Kettenregel für die Ableitung von $f \circ g$?
9. Wie lässt sich die Linearisierung einer Abbildung $f \circ g$ durch die partiellen Ableitungen der Abbildungen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ ausdrücken?
10. Warum sind stetig differenzierbare Funktionen mit beschränkter Ableitung (global) Lipschitz-stetig? (Beweis!)
11. Welche der folgenden Aussagen sind für Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ richtig, welche falsch?
    (a) Partiell differenzierbare Abbildungen sind stetig.
    (b) Diffenzierbare Abbildungen sind stetig.
    (c) Partiell differenzierbare, stetige Abbildungen sind differenzierbar.
    (d) Stetig partiell differenzierbare Abbildungen sind differenzierbar.
    (e) Stetig partiell differenzierbare Abbildungen sind stetig differenzierbar.
12. Wie hängen Fréchet-Ableitung und Gateaux-Ableitungen einer Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Banachräumen X und Y zusammen?
13. Wie lautet der Satz über implizite Funktionen?
14. Unter welcher hinreichenden Bedingung ist eine Abbildung $f : X \to X$ lokal invertierbar?

15. Welche Linearisierung hat die implizit durch

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \;=\; 1$$

gegebene Funktion $x_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$?

16. Warum bezeichnet der Gradient die „Richtung des steilsten Anstiegs“ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?