Vorrede.

Da man die Ursachen für die harmonischen Verhältnisse suchen muß bei den in geometrischer und wißbarer Hinsicht möglichen Teilungen des Kreises in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile, d. h. bei den darstellbaren ebenen regulären Figuren, glaubte ich eingangs darauf hinweisen zu sollen, daß man heutzutage, wie aus dem veröffentlichten Schrifttum hervorgeht, die begrifflichen Unterschiede der geometrischen Dinge gänzlich außer acht läßt. Ja auch bei den Alten findet sich, abgesehen von Euklid und seinem Kommentator Proklus, niemand, der eine genaue Kenntnis dieser spezifischen Unterschiede der geometrischen Dinge an den Tag legte. Die Einteilung der Probleme in flächenhafte, räumliche und lineare, wie sie der Alexandriner Pappus und seine Vorläufer vornehmen, stellt zwar in genügender Weise das heraus, was sich dem Verstand bei der Anschauung der einzelnen Teile eines geometrischen Gebildes darbietet. Allein diese Einteilung geschieht nur in knappen Worten und ist ganz auf die Praxis zugeschnitten; der Theorie geschieht keine Erwähnung. Und doch werden wir nie die harmonischen Verhältnisse ergründen können, wenn wir nicht allen Scharfsinn auf die Theorie dieser Dinge aufwenden. Proklus Diadochus zeigt sich in den 4 Büchern, die er zum ersten Buch des Euklid herausgegeben hat, in der Rolle eines theoretischen Philosophen auf dem Gebiet der Mathematik. Hätte er uns auch seinen Kommentar zum zehnten Buch des Euklid hinterlassen, so hätte seine aufmerksame Lektüre die heutigen Mathematiker von ihrer Unkenntnis befreien können; mich selber hätte er dann auch der Mühe völlig enthoben, die Unterschiede der geometrischen Dinge auseinanderzusetzen. Daß ihm diese Unterschiede der Gedankendinge wohl bekannt waren, geht klar hervor aus seinen einleitenden Ausführungen. Hier stellt er für jegliches mathematische Sein die gleichen Prinzipien auf, die auch bei allen anderen Wesen auftreten und alles aus sich vermögen, nämlich die Begrenzung und das Unbegrenzte, indem er die Begrenzung als die Form, das Unbegrenzte als die Materie der geometrischen Dinge anerkennt.

Für die Größen charakteristisch sind Figuration und Proportion, und zwar Figuration für die Größen im einzelnen betrachtet, Proportion in Hinsicht auf ihre gegenseitigen Beziehungen. Die Figuration wird durch Grenzen vollzogen. So wird eine gerade Linie durch Punkte, eine ebene Fläche durch Linien, ein Körper durch Flächen begrenzt, umschlossen und figuriert. Was nun begrenzt, umschlossen und figuriert ist, das kann auch durch den Verstand erfaßt werden. Das Unbegrenzte und Unendliche dagegen läßt sich, eben weil es dieser Art ist, in keiner Weise durch die Schranken einer durch Definitionen zu gewinnenden Erkenntnis oder einer geometrischen Konstruktion einschließen. Die Figuren aber existieren erstlich im Urbild, dann im Einzelwerk, erstlich im göttlichen

Geist, dann in den Geschöpfen, zwar in verschiedener Weise je nach dem Subjekt, aber in der gleichen Form ihres Wesens. So wird für die Größen die Figuration eine geistige Wesenheit, ihr wesentlicher Unterschied liegt im Gedanklichen. Das wird viel klarer, wenn man die Proportionen betrachtet. Denn da die Figuration durch mehrere Grenzen vollzogen wird, geschieht es, daß wegen dieser Mehrzahl die Figuration von Proportionen Gebrauch macht. Was aber die Proportion ohne einen Akt des Verstandes sein soll, kann man in keiner Weise einsehen. Wer also den Größen Grenzen als Wesensprinzip zuweist, der gibt damit auch zu, daß die figurierten Größen eine intellektuelle Wesenheit besitzen. Allein es bedarf keiner weiteren Beweisführung. Man lese das ganze Buch des Proklus. Daraus geht zur Genüge hervor, daß ihm die intellektuellen Unterschiede der geometrischen Dinge ganz wohl bekannt waren. Er spricht sich freilich über diesen Gegenstand nicht in besonderen Ausführungen so klar und durchsichtig aus, daß es auch ein oberflächlicher Leser merken würde. Der Strom seiner Rede fließt gleichsam in einem vollen breiten Bett und führt überall eine reiche Fülle von Sätzen und Gedanken der ziemlich schwer verständlichen platonischen Philosophie mit sich, und unter diesen findet sich auch der besondere Gegenstand des vorliegenden Buches.

Die Gegenwart hat jedoch bisher noch nicht Zeit und Muße gefunden, in
† diese Geheimnisse einzudringen. Petrus Ramus findet zwar das Buch des Proklus interessant. Allein den Kern seiner Philosophie mitsamt dem zehnten Buch des Euklid lehnt er ab und verwirft er. Der Verfasser des Euklidkommentars wird zurückgewiesen und zum Schweigen verdonnert, wie wenn er eine Verteidigungsschrift für Euklid abgefaßt hätte, und der Zorn des feindseligen Kritikers wendet sich gegen Euklid, wie wenn dieser Angeklagter wäre. Dessen zehntes Buch wird durch einen grimmigen Richterspruch verurteilt, daß nur ja der Mann nicht gelesen wird, der die Geheimnisse der Philosophie vor einem ausbreiten kann, wenn man ihn liest und versteht. Man lese bitte nur die Worte des Ramus in seinen Scholae mathematicae Kapitel 21; nie hat er etwas geäußert, was eines Ramus unwürdiger ist. Er sagt da: „Der Stoff im zehnten Buch ist in einer Weise dargestellt, daß ich in der gesamten wissenschaftlichen Literatur nie etwas ähnlich Dunkles gefunden habe. Dunkel nicht insofern um einzusehen, was Euklid lehrt (denn das kann auch für ungelehrte und ungebildete Leute verständlich sein, die nur auf das schauen, was da und vorhanden ist), dunkel aber um völlig zu verstehen und zu ergründen, welchen Zweck und Sinn das ganze Buch hat, welches die Gattungen, Arten, Unterschiede der behandelten Begriffe sind; ich habe nie solch verworrenes und verwickeltes Zeug gelesen oder gehört. Ja der pythagoreische Aberglaube scheint sich hier gleichsam in eine Höhle verkrochen zu haben, usw." Doch beim Kuckuck, Ramus, hättest du das Verständnis des Buches nicht für allzu leicht gehalten, so hättest du ihm nicht den Vorwurf so großer Dunkelheit gemacht. Hier bedarf es größerer Mühe, es bedarf der Ruhe, es bedarf angespanntester Aufmerksamkeit des Verstandes, bis man den Plan des Verfassers ergründet. Hat sich aber der Geist hochsinnig so weit durchgerungen, dann erst wird er sich bewußt, daß er im Licht der Wahrheit wandelt; ein unglaubliches Entzücken erfaßt ihn, und frohlockend durchschaut er hier aufs genaueste wie von einer hohen Warte aus die ganze Welt und alle Unterschiede ihrer Teile. Allein für dich, der du dich hier aufspielst als Schutzherr der Unwissenheit und der großen Menge, die aus allem, Göttlichem und Menschlichem, nur Gewinn herausholen möchte, für euch alle sind das „ungeheuerliche Sophis-

men", für euch „hat Euklid seine Muße in ungebührlicher Weise mißbraucht", für euch „haben jene Geistreicheleien in der Geometrie keinen Platz". Nun, ich überlasse es euch zu zerpflücken, was ihr nicht versteht. Für mich aber, der ich die Ursachen der Dinge aufspüre, kann ich sagen, daß sich mir zu diesen außer im zehnten Buch des Euklid nirgends ein Zugang aufgetan hat.

Im Gefolge des Ramus hat Lazarus Schoner in seiner Geometrie gestan- †
den, er habe nicht eingesehen, daß die fünf regulären Körper in der Welt irgend-
einen Zweck haben, bis er mein Buch mit dem Titel „Mysterium Cosmographi-
cum" gelesen habe. Darin beweise ich, daß die Zahl und die Abstände der Pla- †
neten von diesen fünf regulären Körpern hergenommen sind. Man sieht, wie der
Lehrer Ramus seinem Schüler Schoner geschadet hat. Zuerst hat Ramus durch
die Lektüre des Aristoteles, der die pythagoreische Philosophie betreffs der von
den fünf Körpern hergeleiteten Eigenschaften der Elemente abgelehnt hatte, sich †
zur Verachtung der ganzen pythagoreischen Philosophie hinreißen lassen. Als er
sodann erfuhr, daß Proklus der pythagoreischen Sekte angehörte, glaubt er diesem
nicht, wenn er, was durchaus richtig ist, behauptete, daß der letzte Zweck von
Euklids Werk, auf den sich schlechterdings alle Sätze aller Bücher (außer den
die vollkommene Zahl betreffenden) beziehen, die fünf regulären Körper sind.
Daraus ist bei Ramus die feste Überzeugung entstanden, man müsse die fünf
Körper aus dem Schlußteil von Euklids Elementen herausnehmen.

Strich man aber den Schluß des Werkes, so nahm man gewissermaßen
dem Gebäude seine sinnvolle Form, und es blieb bei Euklid nur ein unförmiger
Haufen von Sätzen übrig, gegen den Ramus wie gegen ein Gespenst in den
ganzen 28 Kapiteln seiner Scholae loszieht mit einer so großen Schärfe der Rede,
einer so großen Unbedachtsamkeit des Urteils, wie sie eines so bedeutenden Man-
nes höchst unwürdig ist. Schoner folgte dieser Auffassung des Ramus und glaubte
auch selber, daß die regulären Körper keinerlei Bedeutung besitzen. Aber nicht
allein dies, er vernachlässigte oder mißachtete auch Proklus, indem er dem Ur-
teil des Ramus folgte; und doch hätte er von Proklus die Bedeutung der fünf
Körper für die Elemente Euklids, wie für den Bau der Welt lernen können. Nun
war freilich der Schüler glücklicher als der Lehrer; denn er hat unter Glück-
wünschen die Bedeutung der Körper angenommen, die ich für den Weltbau ent-
hüllt habe, und die Ramus verschmäht hatte, weil sie von Proklus kam. Denn
was soll man jetzt sagen, wenn die Pythagoreer diese Figuren den Elementen, nicht
wie ich den Weltsphären zuteilten? Ramus hätte sich Mühe geben sollen, diesen
ihren Irrtum betreffs des wahren Subjekts der Figuren zu beseitigen, wie ich es
getan habe. Er hätte dann nicht diese ganze Philosophie mit einem Gewalturteil
erledigt. Wie, wenn die Pythagoreer das gleiche lehrten wie ich, indem sie ihre
Anschauungen durch eine Hülle von Worten verdeckten? Tritt nicht die koper-
nikanische Weltform bei Aristoteles selber auf, wenn er diese in verkehrter Weise
unter fremden Bezeichnungen widerlegt, indem die Pythagoreer die Sonne Feuer
und den Mond Gegenerde nannten? Wenn nämlich die Anordnung der Sphären bei
den Pythagoreern die gleiche war wie bei Kopernikus, wenn sie die fünf Körper
und die Notwendigkeit ihrer Fünfzahl kannten, wenn alle beständig lehrten, die
fünf Körper seien die Urbilder der Weltteile, so fehlt sehr wenig uns glauben zu
machen, daß ihre Anschauung, die Aristoteles in rätselvoller Form zu lesen be-
kam, wie unter dem wahren Sinn der Worte versteckt von diesem bekämpft
wurde. So liest Aristoteles Erde, der die Pythagoreer den Würfel zuwiesen, wäh-
rend diese vielleicht den Saturn meinten, dessen Sphäre durch die Einschaltung

des Würfels vom Jupiter getrennt ist. Der Erde wird ferner gemeinhin die Ruhe zugeschrieben; nun aber hat Saturn die langsamste Bewegung, die der Ruhe am nächsten kommt, erhalten, weswegen er auch bei den Hebräern von der Ruhe seinen Namen erhalten hat. In gleicher Weise liest Aristoteles, der Luft sei das Oktaeder zugewiesen, während die Pythagoreer vielleicht den Merkur meinten, dessen Sphäre durch das Oktaeder umschlossen ist; auch hat Merkur (als schnellster von allen Planeten) eine ähnliche Beweglichkeit, wie sie von der Luft angenommen wird. Das Wort Feuer sollte vielleicht Mars bedeuten, der auch sonst vom Feuer her den Namen Pyrois trägt; ihm ist das Tetraeder zugewiesen, vielleicht, weil seine Sphäre durch diese Figur umschlossen ist. Und unter der Bezeichnung Wasser, dem das Ikosaeder zugeteilt ist, mag sich das Venusgestirn verstecken, dessen Bahn durch das Ikosaeder eingeschlossen wird; wie man ja der Venus die Feuchtigkeit unterordnet und von ihr selber erzählt, sie sei aus dem Schaum des Meeres geboren, woher der Name Aphrodite kommt. Schließlich konnte das Wort Welt Erde bedeuten und der Welt das Dodekaeder zugeschrieben werden, da die in zwölf Teile eingeteilte Bahn der Erde durch diese Figur umschlossen wird, die ihrerseits ringsherum zwölf Seitenflächen enthält. Daß dementsprechend in der Geheimlehre der Pythagoreer die fünf Figuren aufgeteilt sind nicht auf die Elemente, wie Aristoteles glaubte, sondern auf die Planeten, wird besonders dadurch bestätigt, daß Proklus den Sinn der Geometrie u. a. darin sucht, daß er lehrt, wie der Himmel in seinen verschiedenen Teilen wohlbestimmte Figuren erhalten hat.

Aber noch ist des Schadens kein Ende, den Ramus angerichtet hat. Da ist

† Snellius, der geschickteste unter den heutigen Mathematikern, der dem Ramus völlig beipflichtet in der Vorrede zu den Problemata des Ludolph van Ceulen. Er sagt da zum erstenmal, daß jene Einteilung der unaussprechbaren Größen in 13 Arten praktisch unnütz sei. Ich gebe dies zu, falls dieser keine praktische Verwendung gelten läßt außer im gemeinen Leben und wenn die Betrachtung der Naturdinge für das Leben bedeutungslos ist. Aber warum folgt er nicht dem Proklus, den er anführt und für den die Geometrie ein höheres Gut ist als das zum Leben notwendige Handwerk? Dann wäre ihm auch die Bedeutung des zehnten Buches aufgegangen, die in der vergleichenden Darstellung der Arten von Figuren liegt. Snellius führt als Gewährsmänner Mathematiker an, die das zehnte Buch Euklids nicht benützen. Aber alle diese handeln von linearen oder räumlichen Problemen und von solchen Figuren und Größen, die keinen Sinn in sich selber tragen, sondern offenkundig auf andere praktische Verwendungen abzielen und ohne diese nicht erforscht würden. Allein die regulären Figuren werden um ihrer selbst willen erforscht als Urbilder, sie tragen ihre Vollkommenheit in sich selber und gehören zu dem Gebiet der Flächenprobleme, ohngeachtet daß durch die ebenen Seitenflächen auch ein Körper eingeschlossen wird. In ähnlicher Weise bezieht sich auch der Gegenstand des zehnten Buches hauptsächlich auf flächenhafte Gebilde. Warum werden Dinge herangezogen, die heterogener

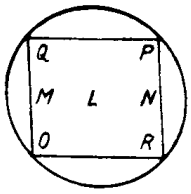
† Art sind? Warum die Ware niedrig geschätzt, die nicht Kodrus kauft, um seinen Bauch zu füttern, sondern die Kleopatra erwirbt, um ihre Ohren zu schmücken? „Hat sich die ‚Crux' so tief in die Köpfe eingeprägt?" Nämlich in die Köpfe derer, die durch Zahlen, d. h. durch Aussprechbares, das Unaussprechbare quälen. Ich aber behandle diese Arten nicht mit Zahlen, nicht mit Hilfe der Algebra, sondern durch verstandesmäßige Überlegung, weil ich sie ja nicht brauche zur Ausführung von Warenrechnungen, sondern zur Erforschung der Ursachen der Dinge.

Man müsse diese Feinheiten von der Elementenlehre trennen, meint Snellius, und in den Bibliotheken verbergen. Er zeigt sich durchaus als getreuer Schüler des Ramus und leistet für diesen keine ungeschickte Arbeit. Ramus nahm dem euklidischen Bauwerk die sinnvolle Form, stürzte die Spitze, die fünf Körper, um. Nach deren Entfernung war das ganze Gefüge aufgelöst; die Mauern sind voller Risse, die Gewölbe drohen einzustürzen. Snellius nimmt nun auch noch den Mörtel weg, der ja doch nur dazu dient, dem unter den fünf Figuren zusammengefügten Haus Festigkeit zu geben. O die glückliche Auffassungsgabe des Schülers! Wie gewandt hat er von Ramus den Euklid verstehen gelernt! D. h. sie glauben beide, der Name Elemente komme daher, daß man bei Euklid eine bunte Fülle von Sätzen, Problemen und Theoremen findet für jegliche Art von Größen und jegliche Art ihrer praktischen Verwendung. Und doch hat das Buch seinen Namen Elementenlehre von seiner Form, insofern immer der folgende Satz sich auf den vorausgehenden stützt bis zum letzten Satz des letzten Buches (teilweise auch des neunten Buches) und dieser letzte Satz keinen vorausgehenden entbehren kann. Aus dem Architekten machen sie einen Waldarbeiter oder Holzfäller, indem sie glauben, Euklid habe deswegen sein Buch geschrieben, um für alle anderen zu arbeiten, selber aber verzichte er auf ein eigenes Haus. Doch ich habe mehr als genug hievon an dieser Stelle gesagt; wir wollen zum Anfang unserer Vorrede zurückkehren.

Als ich sah, daß die wahren und echten Unterschiede der geometrischen Dinge, von denen ich die Ursachen der harmonischen Proportionen herholen muß, allgemein völlig unbekannt sind, daß Euklid, der sie zum Studium überliefert hat, durch die bissige Kritik des Ramus unterdrückt und ausgeklatscht, durch den Lärm übermütiger Leute überschrien und von niemand gehört wird oder auch tauben Ohren die Geheimnisse der Philosophie erzählt, daß Proklus, der das Verständnis Euklids hätte eröffnen, Verborgenes ans Licht ziehen und Schwerverständliches leicht machen können, zum Gespött dient und auch seinen Kommentar nicht bis zum zehnten Buch fortgesetzt hat, wurde mir klar, was ich zu tun hatte. Ich erkannte meine Aufgabe darin, zuerst aus dem zehnten Buch Euklids das herauszuschreiben, was für mein gegenwärtiges Vorhaben besonders wichtig ist, die Reihe der Gedanken jenes Buches unter Verwendung gewisser Einteilungsgründe klar herauszustellen, die Ursachen anzugeben, warum Euklid manche Einteilungsglieder ausgelassen hat, und schließlich von den Figuren selber zu handeln. Dabei habe ich mich mit einer einfachen Anführung der Sätze begnügt, soweit es sich um völlig klare Darlegungen Euklids handelt. Vieles, was von Euklid auf andere Weise dargelegt wurde, mußte ich wegen des Zweckes, den ich verfolge, d. h. wegen der Vergleichung der wißbaren und nicht wißbaren Figuren, neu darstellen; Getrenntes mußte ich verbinden oder die Anordnung ändern. Die Reihe der Definitionen, Sätze und Theoreme habe ich fortlaufend numeriert, wie in der Dioptrik, um bequem zitieren zu können. In den Lehnsätzen war ich nicht sehr genau und habe mich nicht allzusehr um den Ausdruck bekümmert; ich war mehr auf die Sache selber bedacht, da ich ja nicht in der Philosophie als Mathematiker, sondern in diesem Teil der Mathematik als Philosoph auftrete. Ich wünschte nur, ich hätte über die geometrischen Fragen noch populärer, klarer und greifbarer reden können. Allein ich hoffe, die geneigten Leser werden in beiden Fällen, wenn ich geometrische Dinge in populärer Form vortrage oder wenn es mir nicht gelang, die Dunkelheit des Stoffs durch eindringlichen Fleiß zu überwinden, meine Bemühung freundlich

Über die Darstellbarkeit der regelmäßigen Figuren.

I. DEFINITION.

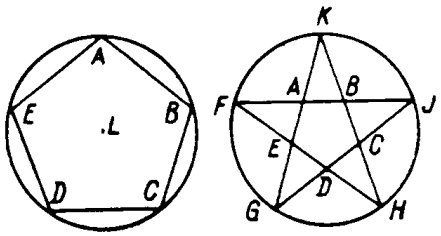


Ebene reguläre Figur heißt eine solche, die lauter gleiche Seiten und gleiche, nach außen gekehrte Ecken besitzt.

Z. B. hier *QPRO*. Die Seiten *QP*, *PR*, *RO*, *OQ* sind gleich; ebenso die Winkel *QPR*, *PRO*, *ROQ*, *OQP*.

II. DEFINITION.

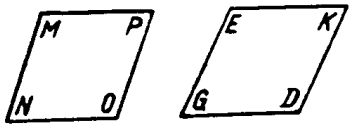
Die einen dieser Figuren sind primär und ursprünglich, nämlich jene, die über ihre Grenzlinien nicht hinausragen; ihnen kommt die angegebene Definition im eigentlichen Sinn zu. Die anderen sind erweitert, indem sie gleichsam über ihre Seiten hinausragen; sie entstehen, indem man nichtbenachbarte Seiten einer primären Figur bis zu ihrem Schnitt verlängert; sie heißen Sterne.



So ist hier *ABCDE* ein vollkommenes Fünfeck; es ist eine primäre Figur, die keine andere vollkommene Figur erfordert, aus der es durch Verlängerung der Seiten hervorginge.

Dagegen ist *FGHJK* ein fünfeckiger Stern und eine erweiterte Figur, die entstanden ist durch Verlängerung von je zwei nicht benachbarten Seiten, z. B. *AB* und *DC* bis zum Schnitt in *J*.

III. DEFINITION.



Halbreguläre Figuren sind jene, die verschiedene Winkel, aber vier gleiche Seiten haben, wie die Rhomben *NMPO*, *GEKD*.

IV. SATZ.

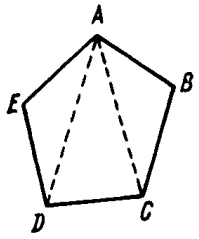
Alle regulären Figuren können mit allen ihren Ecken zugleich auf ein und denselben Kreis gelegt werden.

Denn nach Euklid III, 21 können gleiche Winkel ein und demselben Kreissegment, also auch gleichen Segmenten ein und desselben Kreises einbeschrieben werden. Nun sind aber alle Winkel einer regulären Figur gleich, also können alle Winkel einer bestimmten Figur gleichen Segmenten eines bestimmten Kreises einbeschrieben werden. Es müssen aber auch wirklich, wenn nur einer einbeschrieben ist, alle zugleich einbeschrieben werden. Denn die Seiten sind alle einander gleich, daher sind auch die Kreissegmente einander gleich, die von je zwei einen Winkel einschließenden Seiten abgeschnitten werden, nach Euklid III, 24. Also liegen mit einer Ecke auch die Endpunkte der Seiten auf dem Kreis. Diese

 Endpunkte sind aber ebenfalls Ecken. Anders wäre es, wenn zwar die Winkel gleich, die Seiten aber nicht gleich wären. Dann würden sich nicht alle Winkel einbeschreiben lassen.

V. DEFINITION.

Eine Figur beschreiben (describere) heißt das Verhältnis zwischen den zu den Winkeln gehörigen Sehnen und den Schenkeln eines Winkels durch ein geometrisches Verfahren bestimmen, aus diesen Verhältnissen die Elementardreiecke der Figur konstruieren und aus den Dreiecken die Figur vollends zusammensetzen.

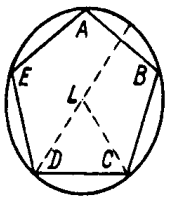


Denn ist das Verhältnis von DA zu AE und ED gegeben, so erhält man die Dreiecke DAE, DAC und CAB, aus denen die Figur besteht.

VI. DEFINITION.

Eine Figur einem Kreis einbeschreiben (inscribere) heißt das Verhältnis der Seite zum Durchmesser des Kreises, dem die Figur einbeschrieben werden soll, durch ein geometrisches Verfahren bestimmen; ist dieses Verhältnis bestimmt, so läßt sich leicht die vorgegebene Figur in den Kreis zeichnen.

So möge z. B. der Halbmesser LD oder sein Doppeltes, der Durchmesser, gegeben sein. Wenn wir nun wissen, was wir mit ihm machen müssen, um für die Seite DE die wahre Länge zu bekommen, so werden wir hernach leicht durch wiederholtes Abtragen von DE auf der Peripherie die Figur vollenden können.



VII. DEFINITION.

Wissen (scire) heißt bei geometrischen Dingen messen durch ein bekanntes Maß. Dieses bekannte Maß ist hier bei der Aufgabe, Figuren einem Kreis einzubeschreiben, der Kreisdurchmesser.

VIII. DEFINITION.

Wißbar (scibilis) ist, was entweder selbst unmittelbar meßbar ist durch den Durchmesser, falls es sich um eine Strecke, oder durch deren Quadrat, wenn es sich um eine Fläche handelt, oder was wenigstens nach einem wohlbestimmten geometrischen Verfahren aus solchen Größen gebildet wird, die, wenn auch in noch so langer Kette, schließlich vom Durchmesser bzw. seinem Quadrat abhängen. Auf griechisch sagt man *γνώριμον*.

IX. DEFINITION.

Die Darstellung (demonstratio) ist die Herleitung der zu beschreibenden oder zu wissenden Größe aus dem Durchmesser mit Hilfe von möglichen Zwischengliedern, auf griechisch *πόριμα*.

So erzeugt die Darstellung gemeinhin entweder die Beschreibung oder das Wissen. Dabei gibt die Beschreibung rein nur die Größe an, das Wissen dagegen außerdem auch die Qualität oder Art der Größe. Es kann aber eine Strecke zwar geometrisch bestimmt sein (auf griechisch *ταχτή*), ohne daß man aber schon verstandesmäßig wüßte, von welcher Art sie ist. Umgekehrt ist es möglich, daß man von einer oder mehreren Strecken zwar die Qualität weiß, daß sie aber

dadurch nicht eindeutig bestimmt werden, insofern jene Qualität auch vielen anderen an Größe verschiedenen Dingen zukommt. Auch ist von manchen Linien die Beschreibung zwar leicht, das Wissen aber sehr schwer. Schließlich können viele Größen zwar durch irgendein geometrisches Verfahren beschrieben werden, man kann sie aber ihrer Natur nach nicht wissen, entsprechend unserer obigen Definition des Wißbaren.

X. DEFINITION.

Eine eigentliche Darstellung liegt vor, wenn die Zahl der Ecken der Figur selber oder einer mit ihr durch die doppelte oder halbe Seitenzahl verwandten Figur die Bestimmung des Verhältnisses vermittelt, in dem die Seite zum Durchmesser steht.

Denn jede reguläre Figur ist entweder selber ein Dreieck oder durch Diagonalen in Dreiecke zerlegbar. Da aber jedes Dreieck drei Winkel hat, die zusammen zwei Rechte betragen, so tritt im Winkel des regulären Dreiecks der dritte, im kleinsten Winkel des elementaren Viereckdreiecks der vierte, in dem des Fünfeckdreiecks der fünfte, in dem des Siebenecksdreiecks der siebte usw. Teil von zwei Rechten auf. Von der Größe dieser Winkel geht die Darstellung aller dieser Vielecke aus.

XI. DEFINITION.

Eine uneigentliche Darstellung liegt vor, wenn das Verhältnis der Seite zum Durchmesser aus der unmittelbaren Verwendung der Eckenzahl geometrisch nicht bestimmt werden kann, sondern nur durch Benützung der Seite einer anderen Figur, die nicht die doppelte oder halbe Seitenzahl besitzt.

XII. DEFINITION.

Man unterscheidet verschiedene Grade der Wißbarkeit, teils entferntere, teils nähere. Der erste und nächste Grad liegt vor, wenn ich von einer Strecke weiß und beweisen kann, daß sie dem Durchmesser gleich ist, oder von einer Fläche (mag sie auch anders geformt sein), daß sie dem Quadrat des Durchmessers gleich ist.

In diesem Fall mißt das bekannte Maß das Wißbare vollkommen, d. h. ohne weiteres durch sich selber.

XIII. DEFINITION.

Der 2. Grad liegt vor, wenn man den Durchmesser bzw. sein Quadrat in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile teilt und die zu bestimmende Strecke bzw. Fläche gleich einem oder mehreren solchen Teilen ist. Eine solche Strecke heißt auf griechisch *ῥητὴ μήκει*, in Länge aussprechbar. Eine derartige Fläche aber heißt schlechtweg *ῥητή*, aussprechbar. Denn die Zahl ist die Sprache der Geometer.

Zu diesem Grad der Wißbarkeit gelangen wir entweder durch Beschreibung und Einbeschreibung oder auch auf andere Weise durch Verwandtschaft mit irgendeiner anderen Größe, die man auf jenem Weg erhalten hat. Die vorliegende Qualität bestimmt also nicht irgendeine einzige Größe; sie genügt auch nicht zur Bestimmung, so daß ich wüßte, irgendeine Größe sei wegen ihrer Kommensurabilität so oder so beschaffen; ich muß vielmehr auch noch das wissen, wie d. h. durch welche Zahl sie aussprechbar ist.

XIV. DEFINITION.

Der 3. Grad liegt vor, wenn eine Strecke in Länge unaussprechbar, ihr Quadrat aber aussprechbar und vom 2. Grad ist. Sie heißt dann ῥητὴ δυνάμει, in Potenz aussprechbar.

XV. DEFINITION.

Alle folgenden Grade heißen ἄλογοι, unaussprechbar (ineffabiles). Die lateinischen Übersetzer geben diese Bezeichnung mit „irrational" wieder, ein Ausdruck, mit dem die Gefahr der Zweideutigkeit und Unsinnigkeit verbunden ist. Wir wollen daher den Gebrauch dieser Bezeichnung begraben; denn es gibt viele Strecken, die, obgleich unaussprechbar, doch durch die besten Gründe (rationes) in ihrem Bestand gesichert werden. Die Arithmetiker reden in ganz ähnlicher Übersetzung von tauben Zahlen, d. h. von solchen, die nicht mehr aussagen, als Taube hören. Aber unter dieser Bezeichnung verstehen sie sowohl die nur in Potenz aussprechbaren als auch die unaussprechbaren Größen.

Der Reihe nach der 4. Grad, unter den unaussprechbaren Größen der erste, liegt nun vor, wenn weder die Strecke noch ihr Quadrat aussprechbar ist, das Quadrat jedoch in ein solches Rechteck verwandelt werden kann, dessen Seiten wenigstens in Potenz aussprechbar sind. Eine solche Strecke heißt Mediale (μέση), da sie mittlere Proportionale zu zwei aussprechbaren, nur in Potenz kommensurablen Strecken ist; so, wenn eine in Länge, die andere dagegen nur in Potenz, oder wenn beide nur in Potenz aussprechbar sind, die Potenzen sich aber nicht wie Quadratzahlen zueinander verhalten.

Eine solche Strecke ist nicht wißbar, d. h. sie selber, wie ihr Quadrat, wird nicht gemessen durch die Länge einer bestimmten Zahl gleicher Teile des Durchmessers bzw. seines Quadrats. Es werden aber auch die Strecken, zu denen die Mediale mittlere Proportionale ist, nicht beide zugleich durch den Durchmesser gemessen; erst die Quadrate dieser Strecken werden durch das Quadrat des Durchmessers gemessen.

Das Quadrat einer Mediale wird ebenfalls medial genannt, ob es die Form eines Quadrates hat oder in ein Rechteck verwandelt erscheint. Damit gewinnt man eine neue Gattung von Flächen, über die aussprechbaren Flächen hinaus. In diese zwei Gattungen von Flächen, den aussprechbaren und medialen, zer-
† fallen die im folgenden angeführten Arten.

XVI. DEFINITION.

Zu weiteren besonderen Strecken gelangen wir durch Zusammensetzung von je zwei Strecken, durch die zuvor schon ebenfalls neue Grade der Wißbarkeit eingeschaltet werden. Man teile nämlich den Durchmesser oder eine zu dem Durchmesser nur in Potenz kommensurable, also aussprechbare Größe oder auch eine Mediale in zwei ungleiche Teile, oder man füge zwei Teile, wie sie bei der Zerlegung von zwei Größen jener Art entstehen, oder zwei aus solchen Teilen zusammengesetzte Strecken oder Strecken, deren Quadrate aus den Quadraten solcher Teile additiv oder subtraktiv zusammengesetzt sind, aneinander (und zwar zwei der Art nach verschiedene Teile). Im ersten Fall werden die entstehenden Strecken entweder zueinander in Länge kommensurabel oder zwar in Länge inkommensurabel, aber in Potenz kommensurabel sein. Im letzteren Fall ist, wenn man die entstehenden Strecken für sich nimmt, von Kommensurabilität nicht mehr die Rede; aber es kann vorkommen, daß zwei zusammen

so beschaffen sind, daß die Summe ihrer Quadrate oder die Rechtecke aus ihnen Flächen liefern, wie wir sie bisher schon kennen. Sie leisten also dann das gleiche wie unter sich kommensurable Größen. Da die Verbindungen von zwei derartigen völlig inkommensurablen Größen zahlreich sind und rangmäßig unterschieden werden müssen, dürfen wir nicht alle Paare zu einem Grad rechnen.

XVII. DEFINITION.

Der 5. Grad der Wißbarkeit liege also vor, wenn zwei Größen, die beide weder aussprechbar noch medial, vielmehr zueinander völlig inkommensurabel sind, sowohl eine aussprechbare Quadratsumme als auch ein aussprechbares Rechteck ausmachen, ganz wie das der Fall ist bei zwei in Länge aussprechbaren Größen oder auch bei zwei Größen, die nur in Potenz aussprechbar, aber zueinander in Länge kommensurabel sind (Eukl. X, 19). So stehen die Seite des Quadrates 2 und die Seite des Quadrates 8 im doppelten Verhältnis zueinander, weil sich die Quadrate wie 1 zu 4 verhalten. Sie sind also zwar in Länge unaussprechbar, aber unter sich kommensurabel. Ihre Quadrate 2 und 8 geben zusammen 10, eine aussprechbare Fläche, und miteinander multipliziert (d. h. zu einem Rechteck zusammengefügt) ergeben sie das Rechteck 4, also auch etwas Aussprechbares. Genau das gleiche, so behaupte ich, leisten auch gewisse Größenpaare, deren Elemente weder aussprechbar noch medial, vielmehr zueinander völlig inkommensurabel sind. Man darf sie also nicht wie die vorigen Größen zum 2. oder 3. Grad der Wißbarkeit rechnen, sondern muß einen neuen Grad, den 5., setzen.

Man bemerke übrigens, daß wir bei diesem Grad nicht die Strecken selber oder die Quadrate der einzelnen messen, sondern vielmehr ihr gemeinsames Rechteck und ihre Quadratsumme; was dem einen Quadrat fehlt, um aussprechbar zu sein, das wird gerade durch das zweite Quadrat ergänzt. †

XVIII. DEFINITION.

Ein 6., dem Rang nach niedrigerer Grad der Wißbarkeit liegt vor, wenn bei der Vereinigung von zwei Größen, die weder aussprechbar noch medial, vielmehr zueinander völlig inkommensurabel sind, nur die eine der beiden Flächen aussprechbar, die andere aber medial wird. Und zwar liegen zwei Fälle vor: entweder ist die Quadratsumme aussprechbar, das Rechteck medial, oder die erstere medial und das letztere aussprechbar.

Im ersten Fall leisten die Größen das gleiche wie zwei aussprechbare und nur in Potenz kommensurable Größen. Denn die beiden Potenzen, d. h. die aussprechbaren Quadrate, haben auch eine aussprechbare Summe; das Rechteck aber ist medial (Eukl. X, 21).

Im zweiten Fall leisten die Größen das gleiche wie zwei mediale, nur in Potenz kommensurable Größen, die sich zueinander verhalten wie zwei aussprechbare Größen, zu denen die erste der beiden Medialen mittlere Proportionale ist (Eukl. X, 25. 27). Denn da sie in Potenz kommensurabel sind, ist die Summe ihrer Quadrate den Teilen kommensurabel. Nun sind aber die Teile medial, und jede zu einer Mediale kommensurable Größe ist selber medial (Eukl. X, 23).

In diesem zweiten Fall messen wir zwar das Rechteck aus den beiden Größen durch das Quadrat des Durchmessers, aber nicht auch die Quadratsumme; was wir finden, sind zwei Strecken, die ein der Quadratsumme gleiches Recht-

eck bilden, und die Quadrate dieser Strecken messen wir durch das Quadrat des
† Durchmessers.

XIX. DEFINITION.

Ein 7., dem Rang nach noch niedrigerer Grad der Wißbarkeit liegt vor, wenn weder die Quadratsumme noch das Rechteck der beiden inkommensurablen Größen aussprechbar ist, beide aber noch medial sind.

Solche Größen leisten das gleiche, wie zwei nur in Potenz kommensurable Medialen, von denen die eine sich zur anderen verhält, wie die eine von zwei nur in Potenz kommensurablen Größen, zu denen die eine Mediale mittlere Proportionale ist, zu einer dritten nur in Potenz kommensurablen Größe (Eukl. X, 28).

Diese drei Streckenpaare, die sich durch die zweifache Art der zugehörigen Flächen unterscheiden, zeigt Euklid hauptsächlich deswegen auf, weil sie zum
† Aufbau der folgenden Arten dienen.

XX. DEFINITION.

Der 8. Grad der Wißbarkeit wird nun aus den im vorausgehenden eingeschalteten Größen abgeleitet; er bezieht sich wiederum auf einzelne Strecken, und zwar solche, die sich durch Zusammensetzung zweier Glieder ergeben, indem man entweder die beiden Größen, die in den vorausgehenden Definitionen auftreten, zusammenfügt oder die eine (man heißt sie „Epharmozusa") von der zugehörigen anderen abzieht. Dabei entsteht eine neue Größenart. Wir wissen oder messen bei den neuen Größen nicht die ganzen Strecken, nicht die Quadrate der ganzen Strecken, nicht die beiden Glieder einer jeden von ihnen, sondern deren Quadratsumme und Rechteck, wie bei den vorausgehenden Definitionen XVIII und XIX. Wir könnten nun ebensoviele Grade der Wißbarkeit aufzählen, als wir im folgenden Arten aufstellen, von denen je die vorausgehende dem Rang nach der folgenden vorausgeht. Da aber jede Zusammensetzung oder Subtraktion innerhalb eines bestimmten Grades erfolgt und es auch keinen Unterschied ausmacht, ob wir addieren oder subtrahieren, vielmehr alle neuen Größen ganz den Paaren der Ausdrücke oder Elemente entsprechen, durch die sie definiert werden, wollen wir sie alle zu einem einzigen Grad rechnen und nur an Rang verschiedene Arten aufstellen.

XXI. SATZ.

Zunächst bemerke man, daß aus zwei unter sich in Länge kommensurablen Größen nichts entsteht, was hier in Rechnung gezogen werden müßte, mögen die beiden Linien aussprechbar, medial oder von noch niedrigerem Rang sein.

Denn wenn die Größen in Länge kommensurabel sind, so ist auch eine aus ihnen zusammengesetzte Größe zu den Teilen kommensurabel. Was aber durch etwas Aussprechbares gemessen wird, ist aussprechbar, nach den Definitionen von Euklid. Eine Größe ferner, die zu einer Medialen kommensurabel ist, ist selbst medial, nach Eukl. X, 23. Ebenso ist eine Größe, die zu irgendeiner der folgenden, hinter den Medialen stehenden Größen kommensurabel ist, von der gleichen Art wie diese, nach Eukl. X, 66—70, 103—107. Auf gleiche Weise verhält es sich auch mit den von Euklid nicht erwähnten Größenarten, die noch weiter abliegende Grade ausmachen. Allein wenn dies auch nicht der Fall wäre, so würde uns dies nichts angehen. Denn entweder würden diese Größen unter eine der Arten fallen, die wir nun sogleich aus den Unaussprechbaren aufstellen werden, und somit die Anzahl der Arten nicht vermehren, oder machen sie dem Rang

nach niedrigere Arten ihrer eigenen oder einer anderen Gattung aus und gehören so nicht hierher, wo wir nur die den vorausgehenden Graden an Rang nächstfolgenden aufstellen.

XXII. DEFINITION.

Übergehen wir also die in Länge kommensurablen Größen und machen wir uns an jene, die nur in Potenz kommensurabel sind. Wenn zwei aussprechbare Strecken dieser Art zusammengefügt werden, entsteht eine „Binomiale", wenn sie voneinander abgezogen werden, eine „Apotome". Von beiden gibt es sechs Unterarten (Eukl. X, 48ff. u. 85ff.).

Wenn aber zwei Medialen zusammengesetzt werden, die entweder ein aussprechbares oder ein mediales Rechteck bilden, so entstehen bei der Addition die „Bimedialen", bei der Subtraktion die „Medialapotomen", und zwar heißen sie im ersten Fall von der ersten Art, im zweiten Fall von der zweiten. †

An dieser Stelle geht es nicht an, eine aussprechbare Größe mit einer medialen zu verbinden; denn solche Größenpaare sind schlechthin inkommensurabel, eine Gattung, von der sogleich im folgenden die Rede sein wird.

XXIII. SATZ.

Es bleiben also noch die unter sich völlig inkommensurablen Größen übrig. Irgendwelche beliebige aus ihnen gebildete Paare, wie zwei Medialen oder eine mediale und eine aussprechbare Größe, vermögen jedoch die geforderten Leistungen nicht zu vollbringen.

Die ersteren Paare können dies nicht wegen des niederen Rangs der beiden Größen, die letzteren wegen der Verschiedenheit ihrer Natur. Siehe Eukl. X, 71, 108, 109. Man gelangt also durch eine solche Zusammensetzung nicht zu einer neuen Art; es bleiben uns somit nur die an Rang niedrigeren Größen übrig, unter Ausschluß der aussprechbaren und medialen.

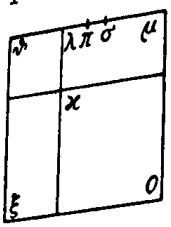
XXIV. SATZ.

Setzt man ein Paar solcher völlig unaussprechbarer Größen, wie sie in der XVII. Definition als vom 5. Grad aufgeführt sind, zusammen oder zieht sie voneinander ab, so entsteht wiederum eine aussprechbare Größe; sie sind also notwendig Binomialen oder Apotomen. Siehe Eukl. X, 112—114. Dabei bemerke man, daß, wenn die Summe der Quadrate einer Binomiale und einer Apotome sowie das Rechteck aus ihnen aussprechbar ist, notwendig die einzelnen Glieder der Binomiale zu den einzelnen Gliedern der Apotome kommensurabel sein müssen, was nicht bei allen Binomialen und Apotomen der Fall ist. †

Daß die Paare solcher Strecken, die die beiden Leistungen vollbringen, notwendig Binomialen oder Apotomen werden, wird auf dieselbe Weise bewiesen, wie Euklid seinen Satz X, 33 bewiesen hat; man muß bloß statt „zwei nur in Potenz aussprechbare Größen" setzen, „zwei in Länge aussprechbare" und, wo das Wort „medial" auftritt, dafür „aussprechbar" setzen; letztlich vergleiche man die Definition der Binomiale und der Apotome.

Daß aber aus der Addition und Subtraktion einer Binomiale und einer Apotome, die die beiden Leistungen vollbringen, wiederum etwas Aussprechbares entsteht, erhellt auf folgende Weise: Da die Summe der Quadrate und das Rechteck aussprechbar sind, besteht das Quadrat über der Summe der Binomiale und Apotome aus den Quadraten beider und aus zwei mit ihnen gebildeten Recht-

ecken, also aus zwei aussprechbaren Bestandteilen. Daher ist auch das ganze Quadrat aussprechbar sowie auch die zusammengesetzte Strecke, die das Quadrat potenziert. Es sei $\lambda\mu$ die Binomiale, $\varkappa o$ ihr Quadrat, $\lambda\vartheta$ die Apotome, $\vartheta\varkappa$ ihr Quadrat; ferner sei die Summe von $\vartheta\varkappa$ und $\varkappa o$ aussprechbar.



Nun ist aber auch das Rechteck aus $\vartheta\lambda$ und $\lambda\mu$ aussprechbar, und zwei solche Rechtecke, nämlich $\varkappa\mu$ und $\varkappa\xi$, ergänzen jene Quadratsumme zu dem Quadrat ϑo über der zusammengesetzten Strecke $\vartheta\mu$.

Bei der Subtraktion wird der Beweis folgendermaßen geführt. Wenn die aus $\vartheta\lambda$ und $\mu\lambda$ zusammengesetzte Strecke $\vartheta\mu$ aussprechbar ist, ist auch ihre Hälfte $\vartheta\pi$ aussprechbar (als das größere Glied, während $\pi\lambda$ das kleinere ist), ebenso auch die andere Hälfte $\pi\mu$. Nimmt man von $\pi\mu$ das Stück $\mu\sigma$ gleich $\vartheta\lambda$ weg, so ist auch der Rest $\pi\sigma$ aussprechbar, ebenso $\lambda\sigma$, das Doppelte von $\pi\sigma$. $\lambda\sigma$ ist aber der Rest bei der Subtraktion der Apotome $\mu\sigma$ von der Binomiale $\lambda\mu$; dieser Rest ist also aussprechbar.

XXV. DEFINITION.

Wenn man das zweite Paar von unter sich völlig inkommensurablen Strecken (aus Nr. XVIII), deren Quadratsumme aussprechbar und deren Rechteck medial ist, zusammensetzt, so entsteht eine Größe, die „*μείζων*" oder „Major" genannt wird; wenn man die beiden subtrahiert, die „*ἐλάττων*" oder „Minor". Beim dritten Paar, bei dem die Quadratsumme medial, das Rechteck aber aussprechbar ist, entsteht durch Addition die sog. „eine Aussprechbare und Mediale Potenzierende", durch Subtraktion die „mit einer Aussprechbaren ein mediales Ganzes Gebende". Schließlich entsteht aus dem vierten Paar des 7. Grades (Nr. XIX), bei dem in beiden Fällen etwas Mediales herauskommt, durch Addition die „zwei Mediale Potenzierende", durch Subtraktion die „mit einer Mediale ein mediales Ganze Gebende".

Damit hat man den Ursprung der 12 euklidischen Arten von unaussprechbaren Größen und die Gründe für ihre Anzahl. Auf noch weiter entfernte Größen, bei denen die Quadratsumme oder das Rechteck oder beide über das Aussprechbare oder Mediale hinaus noch niedrigeren Rang bekommen, glaubte Euklid nicht † eingehen zu sollen.

XXVI. DEFINITION UND VERGLEICHUNG.

Mit der im vorhergehenden erfolgten Begründung der Grade der Wißbarkeit, nach denen sich die Seiten der bei unseren harmonischen Untersuchungen auftretenden Figuren unterscheiden, hätten auch wir uns zufrieden geben können, wenn nicht zu gewissen von uns angeführten Eigenschaften noch weitere hinzukämen, oder vielmehr, wenn nicht den im bisherigen angeführten Eigenschaften weitere von höherem Rang vorausgingen, durch die die Grade der Wißbarkeit gehäuft werden.

Wir haben im seitherigen bei der Addition und Subtraktion von Strecken diese stets beliebig angenommen und ihnen keine bestimmten Einschränkungen hinsichtlich ihrer Größe auferlegt. Nun wollen wir bestimmte Bedingungen hinzufügen und den Paaren eine gewisse Proportion auferlegen. Dabei sollen aber die Paare nicht in der früheren Weise gegeben sein, wo man durch ihre Verbindung eine der 12 Größenarten erhielt, sondern in anderer Weise. Es sollen nämlich Paare gebildet werden durch eine Gerade und einen so zu bestimmenden Teil

von ihr, daß sich der kleinere Teil zum größeren verhält wie der größere zur Summe von beiden oder auch der größere zum kleineren wie der kleinere zur Differenz beider. Was bei der Subtraktion in den beiden Fällen herauskommt, wird nicht immer einem entfernteren Grad zugehören; vielmehr werden wir nach Lage der Sache zurückkommen auf eine unserer im vorhergehenden aufgestellten Arten und die Größe, die wir erhalten und die an sich vom 8. Grad ist, rückwärts mit den Strecken 4. Grades klassifizieren.

Wie nämlich beim 4. Grad in Definition XV zwei Strecken miteinander ein Rechteck bildeten, das bei der Verwandlung in ein Quadrat als dessen Seite eine sog. Mediale lieferte, so bilden jetzt zwei Gerade, das Ganze und der eine Teil, miteinander den anderen Teil durch Subtraktion, oder es bilden die beiden Teile durch Addition das Ganze. Dort sind die Geraden unter sich in Potenz kommensurabel, hier tritt an Stelle der Kommensurabilität die Identität des Verhältnisses zwischen dem Ganzen und den Teilen. Dort ist das Verhältnis zwischen der kleineren Geraden und der zu konstruierenden gleich dem Verhältnis zwischen der zu konstruierenden und der größeren. Hier ist das Verhältnis zwischen den zwei zu konstruierenden Geraden gleich dem Verhältnis zwischen der einen von diesen und der gegebenen Geraden, bei der Subtraktion; bei der Addition ist das Verhältnis zwischen der einen zu konstruierenden Geraden und der gegebenen gleich dem Verhältnis zwischen der gegebenen und der anderen zu konstruierenden Geraden. Dort sind zwei Gerade und damit ihr Rechteck gegeben, und es soll ein diesem gleiches Quadrat konstruiert werden; es ist also zuerst die Fläche gegeben, und daraus ergibt sich die entsprechende Quadratseite. Hier ist es umgekehrt; hat man die beiden zu konstruierenden Geraden konstruiert, so folgt hinterher die Gleichheit zwischen dem Rechteck aus den extremen und dem Quadrat der mittleren der drei Größen (nach Eukl. VI, 17 u. II, 11).

Im ersten Fall haben die Strecken, mit denen Rechtecke gebildet werden, Quadrate, die zu dem Quadrat über der gegebenen Strecke kommensurabel sind. Im vorliegenden Fall muß man, wie Eukl. VI, 30 lehrt, ein Quadrat nehmen, das zu dem Quadrat über der gegebenen Strecke kommensurabel ist, d. h. $^5/_4$ von diesem beträgt, und von der Seite dieses Quadrates die Hälfte der gegebenen Geraden abziehen, um das Stück zu bekommen, das man von der gegebenen Geraden abziehen bzw. zu ihr addieren muß zur Konstruktion des zweiten bzw. dritten Stücks. So viele Gründe also liegen vor, die uns veranlassen müssen, diese Teile dem 4. Grad zuzurechnen. †

Ja in einer Hinsicht erscheint jede in der genannten Weise geteilte Strecke sogar noch von höherem Rang zu sein als eine Mediale. Während diese durch eine längere, aus 4 Gliedern zusammengesetzte Kette von der gegebenen Strecke abgeleitet wird, gründen sich im vorliegenden Fall die Teile auf ihr eigenes Verhältnis, in dem sie unmittelbar zu der gegebenen Geraden stehen. Daher kommt es, daß es zu einer gegebenen Linie viele Medialen gibt, die alle in gleichem Grad von der aussprechbaren Strecke entfernt sind, während sich zu irgendeiner aussprechbaren oder unaussprechbaren Strecke durch jene Teilung nur je ein einziger größerer Teil bestimmen läßt. Daher gehört ihre Darstellbarkeit in gewisser Hinsicht gar zum 1. Grad.

Wenn die gegebene Gerade das Ganze sein soll und ihre beiden Teile gesucht sind, sprechen die Mathematiker von der „Teilung nach den Extremen und dem Mittleren". Diese Bezeichnung will folgendes besagen: Wenn man einerseits eine gewöhnliche Teilung des Ganzen nach einem beliebigen Verhältnis

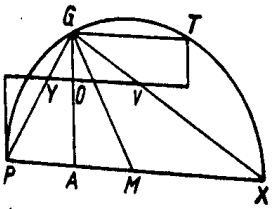
vornimmt, andererseits aber zu dem Ganzen eine Strecke herstellen will, die sich zum Ganzen wie der kleinere Teil zum größeren verhält, dann treten im ersteren Fall vier Glieder auf, zwei äußere und zwei mittlere, im letzteren Fall dagegen nur drei Glieder, das Ganze und der kleinere Teil als die beiden extremen und der größere Teil als das eine mittlere Glied.

Aus dem gleichen Grund spricht man auch von stetiger Teilung. Heutzutage gibt man auch der Teilung wie dem Verhältnis die Bezeichnung „göttlich", wegen ihrer wunderbaren Natur und ihrer mannigfachen Sondereigenschaften, von denen die wichtigste darin besteht, daß man immer wieder eine in gleicher Weise geteilte Strecke erhält, wenn man den größeren Teil zum Ganzen addiert, wobei dann der größere Teil zum kleineren und, was vorher das Ganze war, zum größeren Teil wird, nach Eukl. XIII, 5.

XXVII. SATZ.

Eine solche Teilung nun hat bei allen Strecken statt, bei den in Länge oder nur in Potenz aussprechbaren, bei den Medialen, bei den übrigen 12 Arten, die wir aufgezählt haben, und bei allen anderen. Wir brauchen aber zu unserer Aufgabe nur zwei Arten davon, die mit bisher angeführten Arten sich decken, entsprechend den zwei Strecken, die im folgenden zu teilen sind. Entweder handelt es sich um eine aussprechbare Strecke oder um eine Major. Ist die gegebene Gerade, die geteilt werden soll, in Länge aussprechbar, so wird der größere Teil bei der stetigen Teilung eine Apotome vierter Art, der eine Binomiale von ebenfalls vierter Art entspricht, die dieselben Glieder besitzt wie die Apotome. Man lasse sich aber nicht verwirren: während die Bezeichnung „größerer Teil" sich auf die gegebene Strecke bezieht, heißt dieser Teil Apotome nicht in bezug auf die gegebene Strecke, sondern seiner Beschaffenheit nach. Wenn man nun fragt, wovon er eine Apotome ist, so ist zu sagen, daß er eine Apotome ist von einer Strecke, die nur in Potenz kommensurabel ist zu der gegebenen, d. h. deren Quadrat gleich $^5/_4$ vom Quadrat der gegebenen ist.

Es sei GA die zu teilende Strecke; sie sei in Länge aussprechbar. Man lege daran den rechten Winkel GAM und mache AM gleich der Hälfte von GA. Ferner verbinde man G mit M und beschreibe um M mit GM den Halbkreis PGX; man verlängere AM bis zum Schnitt mit dem Kreis in P und X und errichte über PA das Quadrat PO. Daher ist GA in O stetig geteilt. Also ist AO der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke GA. Es ist aber AO oder die ihr gleiche Strecke AP Apotome nicht von GA, sondern von der Strecke MP oder MG, die GA und ihre Hälfte AM potenziert; denn wenn die Potenz von GA gleich 4 ist, ist die Potenz von AM gleich 1, also die Potenz von GM gleich 5. Der Apotome AO oder AP entspricht die Binomiale AX; beide haben dieselben Glieder, nämlich MX oder MP oder MG und AM.



Daß aber AP Apotome und AX Binomiale je von der vierten Art ist, beweist man folgendermaßen: Beide Glieder, MX und MA, sind aussprechbar; sie sind aber nur in Potenz kommensurabel, da das Quadrat von MX gleich 5 ist, wenn das von MA gleich 1 gesetzt wird. 1 und 5 verhalten sich aber nicht wie zwei Quadratzahlen zueinander. Schließlich ist der Unterschied der Potenzen 5 und 1 gleich 4, also eine Quadratzahl; die entsprechende Quadratseite 2 ist in Länge aussprechbar, nämlich gleich der gegebenen Strecke GA. Das aber sind

die Kennzeichen der Binomialen und Apotomen vierter Art (nach den Definitionen in Eukl. X, vor Satz 48 bzw. 85).

Schließlich gehören, wenn eine aussprechbare Größe GA stetig geteilt wird, ihr größerer Abschnitt OA und die aus der Summe von OA und AG bestehende Strecke zum 5. Grad der Wißbarkeit. Denn die Summe der Quadrate der beiden Strecken ist aussprechbar, nämlich gleich dem dreifachen des Quadrats über der aussprechbaren Strecke GA, nach Eukl. XIII, 4. Ebenso ist auch das Rechteck aussprechbar; denn es ist gleich dem Quadrat von GA, weil ja nach dem vorausgehenden GA mittlere Proportionale zu dem Abschnitt OA und zu der Summe von OA und AG ist.

XXVIII. SATZ.

Des weiteren ist, wenn eine in Länge aussprechbare Linie stetig geteilt wird, der kleinere Abschnitt eine Apotome erster Art.

Wenn also die aussprechbare Strecke GA stetig geteilt, AO der größere und OG der kleinere Abschnitt ist, wie vorher, dann ist auch OG eine Apotome (Eukl. XIII, 6).

Wiederum heißt der Abschnitt OG Apotome seiner Beschaffenheit nach, nicht in bezug auf die in Länge aussprechbare Linie GA, von der er der kleinere Abschnitt ist, aber auch nicht in bezug auf MG oder MP, wovon AO oder AP eine Apotome ist; vielmehr hat GO besondere Glieder. Macht man nämlich nach Eukl. X, 97 ein dem Quadrat einer Apotome (also auch dem Quadrat PO) gleiches Rechteck, dessen eine Seite (hier GT gleich GA) aussprechbar ist, so ist die Breite des Rechtecks (hier GO) eine Apotome erster Art. Andererseits war AO eine Apotome vierter Art. Das größere Glied von GO ist also in Länge aussprechbar, während das größere Glied MP der Apotome AO nur in Potenz aussprechbar war. Und umgekehrt, da die Glieder einer Apotome nur in Potenz kommensurabel sind, muß das kleinere Glied (oder die „Prosharmozusa") von GO eine nur in Potenz kommensurable Größe sein, während das kleinere Glied AM von AO in Länge aussprechbar war; in beiden Fällen aber ist die Differenz der Quadrate der beiden Glieder gleich dem Quadrat einer in Länge aussprechbaren Strecke.

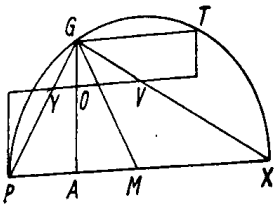
Welches nun die Glieder dieser Apotome GO sind, das überlasse ich anderen zu bestimmen. Jedenfalls gehört nach Eukl. X, 79 zu der Strecke GO als einer Apotome erster Art nur eine einzige „Prosharmozusa". Und zwar muß diese so beschaffen sein, daß ihr Quadrat aussprechbar, aber keine Quadratzahl ist; mit GO zusammen muß sie eine bestimmte in Länge aussprechbare Größe bilden; wenn man die zusammengesetzte Strecke zum Durchmesser eines Kreises macht (er heiße wiederum PX) und die „Prosharmozusa", die etwas länger als PA ist (wofern die zusammengesetzte Strecke gleich PX wäre), von dem einen Ende X des Durchmessers als Sehne XG in den Kreis legt, dann muß nach Eukl. X, 30 die Verbindungslinie von P und G zu der ganzen Linie PX in Länge kommensurabel sein.

XXIX. SATZ.

Nun soll eine bestimmte Major stetig geteilt werden, deren Quadrat gleich einem Rechteck ist, dessen Länge zusammengesetzt ist aus einer vorgegebenen aussprechbaren Strecke und der $^5/_4$ von dieser potenzierenden Strecke, und dessen Breite $^5/_4$ der vorgegebenen aussprechbaren Strecke potenziert. Bei dieser stetigen

Teilung wird der kleinere Abschnitt eine Minor, wobei diese Bezeichnung sich nicht auf das Größenverhältnis, sondern auf die Beschaffenheit bezieht. Der größere Abschnitt wird eine andere Major, wobei die Bezeichnung wiederum, ohne Rücksicht auf ihre Elemente, qualitativ gemeint ist.

Es sei wie vorher GA die halbe Länge der gegebenen aussprechbaren Strecke; ebenso sei AM gleich der Hälfte von GA, so daß, wenn das Quadrat von GA gleich 4, das von AM gleich 1 ist. GAM sei ein rechter Winkel, so daß das Quadrat von MG gleich 5 ist. Man verlängere MA nach beiden Seiten und beschreibe um M mit MG den Halbkreis PGX. Es ist also PX das Doppelte von GM, also das Quadrat von PX gleich $^5/_4$ vom Quadrat der gegebenen Strecke, die doppelt so groß ist wie GA. Nun ist aber die Summe der Quadrate von PG und GX gleich dem Quadrat von PX; daher ist auch diese Summe gleich $^5/_4$ vom Quadrat der gegebenen aussprechbaren Strecke. Macht man nun aus PG und GX eine einzige Strecke, so besteht deren Quadrat aus den zwei Quadraten von PG und GX und aus zwei Rechtecken, die aus PG und GX gebildet sind; diese zwei Rechtecke sind aber gleich zwei Rechtecken aus GA und PX, d. h. gleich einem einzigen Rechteck aus dem Doppelten der Strecke GA und aus PX. Da diese beiden Strecken aussprechbar, aber nur in Potenz kommensurabel sind, ist das Rechteck medial, nach Eukl. X,21. Das Quadrat der ganzen Strecke PGX besteht also aus dem aussprechbaren Quadrat von PX und einem medialen Rechteck von derselben Breite PX. Daher sind diese beiden, das Quadrat von PX und das Rechteck aus PX und dem Doppelten von GA gleich einem Rechteck, dessen eine Seite die aussprechbare Strecke PX und dessen andere Seite die Summe von PX und dem Doppelten von GA ist. Die beiden Bestandteile dieser Summe sind nur in Potenz kommensurabel; das Quadrat des größeren Bestandteils PX übertrifft das des kleineren (des Doppelten von GA) um das Quadrat einer zu PX in Länge inkommensurablen Strecke. (Denn das Quadrat von PX ist 5, wenn das der doppelten GA gleich 4 ist; der Überschuß 1 ist das Quadrat einer Strecke, die zu PX inkommensurabel ist, weil sich 1 und 5 nicht wie zwei Quadratzahlen zueinander verhalten.) Daher ist die aus PX und der doppelten GA zusammengesetzte Strecke eine Binomiale vierter Art. Da also das Quadrat der ganzen Strecke PGX gleich ist einem Rechteck aus einer Binomiale vierter Art und einer aussprechbaren Strecke, ist die ganze Strecke PGX eine Major. Ihre Bestandteile sind PG und GX. Denn da PA Apotome und AX Binomiale ist, sind beide zueinander inkommensurabel. Es verhält sich aber das Quadrat von PG zu dem von GX wie PA zu AX. Also sind PG und GX in Potenz und somit schlechthin inkommensurabel zueinander; sie bilden aber eine aussprechbare Quadratsumme, nämlich das Quadrat von PX; das Rechteck aus PG und GX jedoch ist medial. Daher ist nach Eukl. X,39 die Summe von PG und GX eine Major, die Differenz nach X,76 eine Minor.



Ferner ist aber auch PGX in G stetig geteilt. Denn es verhält sich PG zu XG wie PA zu AG. Nun aber ist PA gleich dem größeren Abschnitt OA der stetig geteilten Strecke GA, da das Quadrat von MP gleich dem Fünffachen des Quadrats von MA und die Apotome AP gleich AO ist, nach Eukl. II,11. Also ist auch PG der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke GX. Addiert man nun PG, den größeren Abschnitt, zum Ganzen GX, so ist nach Eukl. XIII,5 die neue Strecke PGX in G ebenfalls stetig geteilt, wobei jetzt PG der kleinere Ab-

schnitt, GX der größere ist. So wird also die Strecke PGX, eine Major, durch ein und denselben Punkt G sowohl in seine Elemente, denen zufolge die Strecke eine Major ist, als auch in die Abschnitte nach dem göttlichen Schnitt zerlegt.

Ich behaupte nun, daß die Abschnitte der stetig geteilten Strecke auch eine Major und eine Minor sind. Denn da AP eine vierte Apotome ist, ist das Rechteck aus AP und der (in Potenz) aussprechbaren Strecke PX die Potenz einer Minor (Eukl. X,94), und da AX eine vierte Binomiale ist, ist das Rechteck aus AX und PX die Potenz einer Major. Nun sind aber die Quadrate von PG und GX bzw. gleich den Rechtecken APX und AXP, also ist PG eine Minor und GX eine Major.

Es fallen also hier die Bezeichnungen für die Eigenschaften und die für die durch die Teilung bewirkten Größenverhältnisse zusammen. Denn PG heißt der kleinere Abschnitt der in G stetig geteilten ganzen Strecke PGX; es heißt PG aber auch der kleinere Bestandteil der ganzen Strecke PGX, insofern diese ihrer Beschaffenheit nach eine Major ist; und schließlich heißt die Linie PG hinsichtlich ihrer Beschaffenheit Minor, und zwar in bezug auf zwei andere hier nicht dargestellte Strecken, durch deren Subtraktion sie gebildet wird. Ebenso heißt GX zunächst größerer Abschnitt der stetig geteilten ganzen Strecke PGX; zweitens ist die Strecke GX der größere Bestandteil der ganzen PGX, und weiterhin ist sie selber ihrer eigentümlichen Beschaffenheit nach eine Major, ebenso wie die ganze PGX in ihrer Art eine solche ist; die Strecken aber, durch deren Zusammensetzung die Major GX entsteht, sind hier nicht dargestellt.

Wegen dieser Übereinstimmung zwischen stetiger Teilung und der Teilung der Major in ihre Bestandteile hat man, wie ich glauben möchte, diesen Größenarten die qualitativen Bezeichnungen „Major" und „Minor" gegeben.

Man muß sich aber sorgfältig davor hüten, die sachlichen Unterschiede durcheinanderzuwerfen. Die stetige Teilung ist absolut, sie ist nicht gebunden an irgendeine begrifflich erste Strecke, die von vornherein gegeben ist und aussprechbar heißt. Die Größenarten „Major" und „Minor" dagegen erhalten ihren Charakter, insofern sie durch bestimmte Grade von einer ersten gegebenen aussprechbaren Größe abgeleitet werden. Daher kann man wohl den göttlichen Schnitt ins Unendliche fortsetzen, der Charakter der „Major" und „Minor" bleibt aber dabei nicht erhalten. Beim göttlichen Schnitt wird der Abschnitt, der zuvor der größere war, beim nächsten Schnitt der kleinere; bei der anderen Teilung aber wird das, was vorher seiner Beschaffenheit nach eine Minor war, nie und nimmer eine Major, noch die Major eine Minor. Wenn man also die Major GX nochmals stetig teilt, so wird ihr größerer Abschnitt gleich PG. Diese Größe behält den Charakter einer Minor, wird aber keineswegs ihrer Beschaffenheit nach eine Major werden, so wie sie der Größe nach der größere Abschnitt wird. Dies gilt, insofern GA als aussprechbar vorausgesetzt wird.

Man möchte hier die Frage aufwerfen: Wenn die Strecke PGX ihrer Beschaffenheit nach eine Major ist, und ebenso GX, warum kann dann nicht auch der größere Bestandteil von GX eine Major sein, wie der größere Bestandteil GX der Major PGX seinerseits eine Major ist? Darauf ist zu antworten, daß, wenn auch PGX und GX beide je eine Major sind, doch die Bildungsweise bei beiden verschieden ist. Denn in das Quadrat von PGX geht das ganze Quadrat von PX und das ganze Rechteck aus PX und der doppelten GA ein. In das Quadrat von GX aber geht von dem Quadrat über PX nur die Hälfte (das Rechteck aus MX und XP), von dem Rechteck aus PX und der doppelten GA aber

nur der 4. Teil (das Rechteck aus AM und PX) ein. Daher ist im zweiten Fall das Verhältnis der Medialen zu der Aussprechbaren ein anderes als im ersten Fall. Unser Satz will aber die Übereinstimmung zwischen den Abschnitten bei der stetigen Teilung und den Teilen bei der qualitativen Zerlegung nur in bezug auf die erstere Strecke PGX und das bei ihr auftretende Verhältnis der Medialen zu der Aussprechbaren beweisen, nicht auch für die weiteren Strecken.

Um die Analogie zu vervollständigen, bemerke man noch folgende Beziehung: Wie aus der Major GX nach dem Gesetz der stetigen Verlängerung eine neue größere Major, nämlich PGX, entsteht, indem man zu ihr PG addiert, die der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke GX ist, so entsteht umgekehrt aus der gleichartigen Minor PG durch Teilung nach dem göttlichen Schnitt die neue kleinere Minor PY, die der größere Abschnitt der stetig geteilten PG oder gleich dem kleineren Abschnitt GV der stetig geteilten GX ist. Wie also die größte Strecke PGX durch die stetige Teilung in die Major XG und die Minor GP zerfällt, so zerfällt die zweite Major GX in die beiden Minoren XV und VG gleich GP bzw. PY, so daß also hier zwei Minoren zusammen eine einzige Major, diese † Major aber und eine Minor eine andere größere Major bilden.

XXX. SATZ.

Wenn die Seitenzahlen der Figuren Primzahlen sind, so werden durch diese besondere Klassen von Figuren bestimmt, indem man jene Figuren in einer Klasse zusammenfaßt, deren Seitenzahlen durch fortgesetzte Verdoppelung ihrer Primzahl gebildet werden.

Dies folgt aus Definition X. Denn wenn für alle Figuren, deren Seitenzahlen jeweils durch Verdoppelung einer bestimmten Seitenzahl hervorgehen, die Form ihrer eigentlichen Darstellung die gleiche ist, so bilden sie alle miteinander eine einzige Klasse mit Rücksicht auf ihre Darstellbarkeit. Die Gattung oder Klasse wird ja nicht geändert, wenn man auf die einzelnen Figuren die Zweiteilung anwendet, und zwar wegen der in gleicher Weise bestehenden Einfachheit und Gleichheit der Teile; aus den einzelnen Bögen der früheren Figur macht man dabei nur zwei, und zwar gleiche Teile. Bei der Drei- oder Fünfteilung usw. ließe es sich nicht vermeiden, daß man ungleiche Teile macht, wenn es nur je zwei sein sollen, oder daß es mehr Teile gibt, wenn sie gleich sein sollen. So wird z. B. bei der Dreiteilung des Bogens 3 dieser entweder in 2, 1, also in zwei ungleiche Teile, oder in 1, 1, 1, also gleiche, aber mehrere Teile zerlegt.

Der Vordersatz wird folgendermaßen bewiesen: Die Darstellung geht aus von der Zahl der Seiten, nach Definition X. Nun haben die Primzahlen keinen gemeinsamen Teiler; denn die Einheit, in der sie übereinstimmen, läßt keine Teilung zu, ist also kein Zahlenteiler, sie ist keine Zahl. Daher haben die durch die einzelnen Primzahlen bewirkten Arten der Darstellung nichts miteinander zu tun; die ihnen entsprechenden Klassen sind voneinander verschieden. Die erste Klasse enthält die (eigentlichen oder uneigentlichen) Figuren mit den Seitenzahlen 2, 4, 8, 16, 32 usw., die zweite die mit den Seitenzahlen 3, 6, 12, 24, 48, 96 usw., die dritte die mit den Seitenzahlen 5, 10, 20, 40, 80, 160 usw. Und so geht es ad infinitum weiter.

XXXI. SATZ.

Weitere Klassen von Figuren werden gebildet, wenn die Seitenzahlen kleinste Vielfache zweier Primzahlen (ausgenommen die Zahl 2) sind.

Dies folgt aus der Definition XI. Denn wenn man bei der Darstellung der Seite einer solchen Figur nicht von der Zahl ihrer Ecken ausgeht, ist die Form ihrer Darstellung von allen vorigen Fällen verschieden; daher ist auch die Klasse verschieden. Daß durch die Multiplikation der Primzahlen mit der Zahl 2 keine neue Klassen gebildet werden, rührt daher, daß eben durch die Zweiteilung als einer geometrischen Konstruktion die einzelnen Klassen ihre unendlich vielen Glieder bekommen. Wäre dem nicht so, so gäbe es gar keine Klassen, sondern nur einzelne Figuren. Die erste dieser neuen Klassen wird gebildet durch die Zahlen 15, 30, 60, 120, 240, 480 usw., indem man 3 mit 5 multipliziert; die zweite durch die Zahlen 21, 42, 84 usw., indem man 3 mit 7 multipliziert. So folgen unendlich viele, wie wenn man 5 mit 7 multipliziert, woraus sich die Reihe 35, 70, 140 usw. ergibt.

XXXII. SATZ.

Aber auch die Quadrate der Primzahlen (ausgenommen das Quadrat der Zahl 2) und die Produkte der Quadrate mit einer anderen Primzahl oder einem Quadrat einer solchen bilden je besondere, von den früheren verschiedene Klassen.

Der Grund, warum das Quadrat einer Primzahl nicht dieselbe Klasse wie die Primzahl selber erzeugt, liegt darin, daß dort die Darstellung der Seite eine ganz andere ist (falls eine solche überhaupt möglich ist); denn während die Primzahl selber eine neue Klasse von Figuren erzeugt, durch die der ganze Kreis geteilt wird (nach Satz XXX), hat nun die gleiche Primzahl nicht den ganzen Kreis, sondern nur einen Teil von ihm zu teilen. Der Teil eines Kreises ist aber vom ganzen Kreis sehr verschieden hinsichtlich der absoluten Art und Figuration, mit welcher wir uns hier beschäftigen, insofern durch diese Figuration die Form der Darstellung bestimmt wird.

Daß das Quadrat der Zahl 2 ausgenommen wird, rührt daher, daß die Figur, die zweimal zwei Ecken hat, d. h. das Viereck, zur ersten Klasse gehört und das Produkt aus der Zahl 4 und einer Primzahl unter die Klasse dieser Primzahl fällt, da vier gleich zweimal zwei ist. Jede Figur aber mit doppelter Seitenzahl gehört dorthin, wo sich die Figur mit der einfachen Seitenzahl befindet.

Die erste Klasse dieser Gruppe enthält die Vielecke mit den Seitenzahlen 9, 18, 36, 72, 144, 288 usw.,
die zweite die mit den Seitenzahlen 25, 50, 100, 200, 400 usw.,
die dritte die mit den Seitenzahlen 49, 98 usw.

So entstehen aus den Quadratzahlen unendlich viele Klassen. Weiter wird gebildet aus

3 und 9 die Reihe 27, 54, 108, 216, 432 usw.,
3 und 25 die Reihe 75, 150, 300 usw.,
3 und 49 die Reihe 147, 294 usw.,
5 und 9 die Reihe 45, 90, 180, 360 usw.,
5 und 25 die Reihe 125, 250, 500, 1000 usw.,
den beiden Quadratzahlen 9 und 25 die Reihe 225, 450, 900 usw.

So entstehen also neue Klassen durch Multiplikation von Primzahlen mit Quadratzahlen von solchen oder durch Multiplikation zweier solcher Quadratzahlen.

XXXIII. SATZ.

Wenn man von der doppelten Zahl der Ecken einer Figur 4 abzieht und diesen Wert als Zähler setzt, als Nenner aber die Zahl der Ecken selber annimmt, so erhält man den Bruch, der angibt, wie viele Rechte der Winkel der Figur beträgt.

Z. B. beim Dreieck: Zweimal drei ist sechs, 4 abgezogen bleibt 2. Also beträgt der Dreieckswinkel $^2/_3$ Rechte. Beim 20-Eck: Zweimal 20 ist 40, 4 abgezogen bleibt 36; also ist der Winkel des 20-Ecks gleich $^{36}/_{20}$ oder $^9/_5$ Rechte. Denn in jedem Vieleck verteilen sich die Winkel auf ebenso viele Dreiecke, als jenes Seiten besitzt, minus 2. In jedem dieser Dreiecke ist die Winkelsumme 2 Rechte. Also betragen die Winkel einer Figur zweimal soviel Rechte, als die Figur Ecken hat, minus 4. Diese Anzahl von Rechten ist aber auf die Zahl der Ecken zu verteilen; also ist diese Zahl der Nenner, jene der Zähler.

XXXIV. SATZ.

Der Kreis läßt sich durch eine geometrische Konstruktion in zwei gleiche Teile zerlegen. Die Teilungslinie ist wißbar im ersten Grad der Wißbarkeit; denn sie ist der Durchmesser selber.

Die Figuration im Kreis nimmt ja davon ihren Ausgang, daß man von einem vorgeschriebenen Punkt aus eine Gerade so weit zieht, als erforderlich ist.

Die Halbierungslinie des Kreises ist der Durchmesser, d. h. sie geht durch den Mittelpunkt. Da von allen unter sich gleichen Teilen des Kreises der Halbkreis am größten ist, ist auch die Gerade, die ihn in zwei Halbkreise zerlegt, am größten (nach Eukl. III, 14), sie ist ein Durchmesser (nach Eukl. III, 15 und nach Definition).

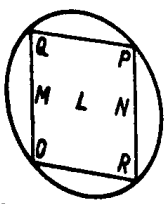
Der Durchmesser nun ist eben jene aussprechbare Größe, die als Maß für die anderen vorgegeben ist; er ist sich selber gleich und das vollkommene Maß seiner selbst und steht am Anfang hinsichtlich der geometrischen Wißbarkeit.

XXXV. SATZ.

Die Seite des Vierecks läßt eine geometrische Darstellung aus den Ecken außerhalb des Kreises zu. Wird es einem Kreis einbeschrieben, so ist die Seite vom dritten Grad der Wißbarkeit, ihr Quadrat vom zweiten, so wie auch die Fläche der Figur.

$OQPR$ sei ein Viereck; sein Winkel ist nach Satz XXXIII ein Rechter; daher läßt sich das Viereck nach Eukl. I, 46 leicht konstruieren, wenn die Seite gegeben ist.

Da es vier Ecken und ebensoviele Seiten hat, schneiden zwei zusammenstoßende Seiten zwei Viertel, d. h. die Hälfte des Kreises, ab. Daher ist nach Satz XXXIV die Verbindungslinie der Endpunkte zweier aufeinanderfolgender Seiten ein Durchmesser des Kreises. So ist die Verbindungslinie der Endpunkte O, P der den rechten Winkel OQP im Halbkreis OQP bildenden Seiten QO und QP der Durchmesser OLP. Daher ist nach Eukl. I, 47 die Summe der Quadrate der beiden Seiten OQ und QP gleich dem Quadrat des Durchmessers. Und wenn man die Hälfte vom Quadrat des Durchmessers in die Form eines Quadrats bringt, nach Eukl. II, 14, so ist dessen Seite gleich der Viereckseite. Somit ist das Quadrat der Seite aussprechbar.

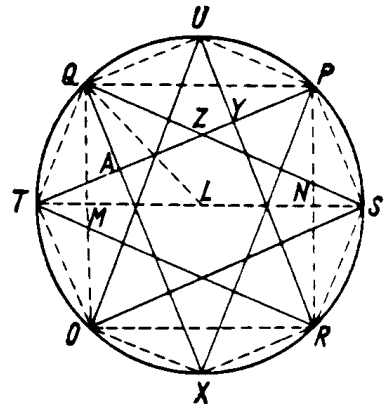


Da sich ferner das Quadrat OP zum Quadrat OQ verhält wie 2 zu 1, also nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen Quadratzahl, und OP in Länge aussprechbar ist, ist die Seite OQ nur in Potenz aussprechbar, nach Eukl. X,9. Der Inhalt des Vierecks ist bei dieser Figur der gleiche wie das Quadrat der Seite; somit ist der Inhalt der Figur aussprechbar.

XXXVI. SATZ.

Die Seite des Achtecks läßt eine geometrische Darstellung aus den Ecken zu, ebenso die Seite des achteckigen Sterns oder die Sehne zu $^3/_8$ des Kreises. Beide Seiten sind je vom achten Grad der Wißbarkeit, die erstere ist eine Minor, die letztere eine Major. Zusammen sind sie vom sechsten Grad und weisen ein gewisses besonderes Verhalten auf. Die Fläche schließlich ist unaussprechbar, und zwar medial.

$UQTOXRSP$ sei das Achteck, $UOSQXPTRU$ der achteckige Stern. Verbindet man die Endpunkte Q und O zweier den Achteckswinkel QTO einschließenden Seiten QT und TO, so ist die Verbindungslinie Seite eines Vierecks, da die Hälfte von acht vier ist.



Hat man also (um andere Konstruktionen des Achtecks zu übergehen) in einen Kreis ein Viereck gezeichnet, so fälle man auf seine Seite OQ vom Mittelpunkt L aus das Lot, das die Seite in M, den Kreisbogen in T schneidet (nach Eukl. I,12). Dadurch wird (nach Eukl. III,30) der Viertelkreis OQ in die zwei gleichen Teile OT, TQ zerlegt. Verbindet man also die Punkte O und T, so ist OT die Seite des Achtecks; verbindet man O mit S, so ist OS die Seite des Sterns.

Verbindet man den Mittelpunkt L mit Q, so ist, da Winkel QML ein rechter ist, das Quadrat der in Länge aussprechbaren Größe QL gleich der Summe der Quadrate von QM und ML. Es ist aber auch das Quadrat des Halbmessers QL doppelt so groß wie das Quadrat von QM, der halben Viereckseite. Daher sind QM und ML einander gleich, und beide sind (nach Satz XXXV) nur in Potenz aussprechbar. Das Quadrat von LQ ist also um das Quadrat der zu LQ in Länge inkommensurablen Strecke MQ größer als das Quadrat von LM. LQ, LS und LT aber sind einander gleich. Also ist die zusammengesetzte Größe SM eine Binomiale vierter Art, deren Glieder SL und LM sind (nach der Definition vor Eukl. X,48). Der Rest MT aber ist eine Apotome vierter Art mit den Gliedern TL und LM (nach der Definition vor Eukl. X,85).

Da also MS eine Binomiale vierter Art und ST aussprechbar ist, ist nach Eukl. X,57 die Strecke QS, deren Quadrat gleich dem Rechteck aus MS und ST ist, eine Major. Und ebenso ist, da TM eine Apotome vierter Art und TS aussprechbar ist, die Seite TQ des Achtecks, deren Quadrat gleich dem Rechteck aus MT und TS ist, nach Eukl. X,94 eine Minor.

Die Elemente der Major und der Minor sind in unserer Zeichnung PA und AT. Denn addiert man zu PA die Strecke AT, so erhält man die Seite PT des Sterns; zieht man aber von PA oder YT die Strecke TA ab, so bleibt AY, d. h. die Achteckseite QU. Das Quadrat der Minor TQ ist doppelt so groß wie das Quadrat des kleineren Gliedes TA, und das Quadrat der Viereckseite QP ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Elemente PA und AQ oder AT.

Ferner verhält sich die Major PX zu ihrem größeren Glied PA, wie sich die Minor TQ zu dem kleineren Glied TA verhält. Und umgekehrt, wie sich das größere Glied PA zum kleineren AT verhält, so verhält sich die Major PX zur Minor TQ. Wie sich also der größere Teil zum kleineren verhält, so verhält † sich das Ganze zur Differenz.

Des weiteren sind die Seiten SQ und QT nicht nur selber Major und Minor; es entstehen aus ihnen durch Addition und Subtraktion Größen des gleichen Charakters. Denn fürs erste sind sie inkommensurabel; sodann ist die Summe ihrer Quadrate gleich dem aussprechbaren Quadrat von TS; drittens ist das Rechteck aus ihnen medial, denn es ist gleich dem Rechteck aus der nur in Potenz aussprechbaren halben Viereckseite QM und der in Länge aussprechbaren Strecke TS. Daher sind SQ und QT zusammen vom sechsten Grad der Wißbarkeit. Somit ist ihre Summe TQS nach Eukl. X, 39 eine Major und die Differenz von QS und QZ oder TQ, d. h. ZS, nach Eukl. X, 76 eine Minor. So liegt also der Fall vor, daß die Major und Minor eines Paares Elemente eines anderen Paares werden und die Differenz zwischen einer Major und der zugehörigen † Minor die Minor eines anderen Paares ergibt.

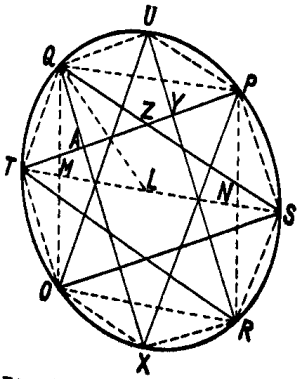
Was die Fläche des Achtecks anlangt, so besteht sie aus 8 Dreiecken von der Art wie LQT. Das Rechteck $QTRS$ besteht aber aus 4 solchen Dreiecken, es ist also gleich der halben Achtecksfläche; dieses Rechteck ist, wie soeben bewiesen wurde, medial. Also ist auch sein Doppeltes, die Achtecksfläche, medial, nach Eukl. X, 23. Clavius beweist in seiner Geometria Practica Buch VIII, Satz 31, daß diese Fläche mittlere Proportionale ist zur Fläche des einbeschriebenen und der des umbeschriebenen Vierecks. Diese Flächen verhalten sich wie † 1 zu 2, woraus sich ebenfalls der mediale Charakter für jene Fläche ergibt.

XXXVII. SATZ.

Die Seite des Sechzehnecks läßt eine geometrische Darstellung aus den Ecken zu. Die Wißbarkeit der Seite ist aber von dem Rang nach niedrigerem Grad als alle bisher behandelten Größen. Dies gilt um so mehr von den Seiten der Sterne, d. h. von den Sehnen zu $^3/_{16}$, $^5/_{16}$, $^7/_{16}$ des Kreises.

Da zweimal acht gleich sechzehn ist, läßt sich diese Figur aus der Achteckseite nach denselben Regeln beschreiben wie vorher das Achteck aus der Viereckseite.

Es sei QO nun nicht mehr die Seite des Vierecks, sondern die des Achtecks; QT und TO seien Seiten des Sechzehnecks und QP eine Seite des achteckigen Sterns. Diese letztere Strecke war im vorigen Fall eine Major, ebenso war auch LM, die Hälfte von ihr, eine Major. Daher ist das Rechteck aus der aussprechbaren Größe ST und der Major LM von einer ganz neuen Art, die unter den früher dargelegten, dem Rang nach höheren Graden nicht erwähnt ist. Zieht man dieses neuartige Rechteck von dem Rechteck ab, das aus den in Länge aussprechbaren Größen LT und TS gebildet wird, so erhält man das aus MT und TS gebildete Rechteck, das gleich dem Quadrat über der Sechzehneckseite TQ ist; dieses Rechteck ist daher ebenfalls von niedriger Art. Um so mehr gelten diese Aussagen von den Vielecken mit noch höherer Seitenzahl, die zu dieser Klasse gehören, d. h. von den 32-, 64-, 128-Ecken.



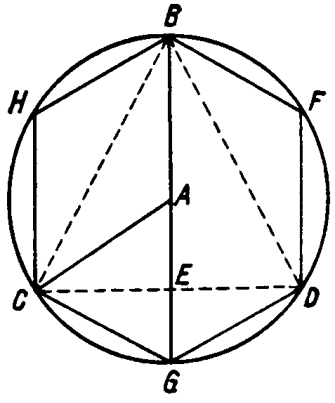
Da es sich also mit der zu $^1/_{16}$ des Kreises gehörigen Sehne so verhält, so ist auch die zu $^7/_{16}$ des Kreises gehörige Sehne von niedrigerem Grad, da man das Quadrat von dieser erhält, wenn man das Quadrat der Sechzehneckseite von dem Quadrat des Durchmessers abzieht. Die zu $^3/_{16}$ des Kreises gehörige Sehne ist durch Halbierung des Bogens aus der zu $^3/_8$ des Kreises gehörigen Sehne abzuleiten; sie ist also noch niedrigeren Grads als diese. Zieht man ferner das Quadrat der zu $^3/_{16}$ des Kreises gehörigen Sehne von dem Quadrat des Durchmessers ab, so erhält man das Quadrat der zu $^5/_{16}$ des Kreises gehörigen Sehne. Diese ist daher ebenfalls von niedrigerem Grad.

XXXVIII. SATZ.

Die Seiten des Dreiecks und des Sechsecks lassen eine geometrische Beschreibung aus den Ecken der Figuren zu; sie sind, in einen Kreis einbeschrieben, wißbar, und zwar die erstere im dritten, die letztere im zweiten Grad. Die Flächeninhalte der Figuren sind jedoch medial; sie stehen im doppelten Verhältnis zueinander.

Die Konstruktion des Dreiecks außerhalb des Kreises ist sehr leicht (Eukl. I, 1). In einem Kreis läßt es sich, um die übrigen Verfahren zu übergehen, am einfachsten mit Hilfe des Sechsecks einbeschreiben, weil die Hälfte von sechs drei ist. Die Konstruktion und die Einbeschreibung des Sechsecks sind im IV. Buch Satz 15 bei Euklid angegeben. Doch ist noch die Folgerung für die Größe der Seite aus den Verhältnissen der Winkel aufzuzeigen.

BHCGDF sei ein Sechseck. Da es 6 Ecken hat, wird auch seine Fläche in 6 Dreiecke zerlegt, die mit ihren Scheiteln im Mittelpunkt *A* zusammenstoßen; eines von ihnen sei *CAG*. Teilt man die Summe von 4 Rechten, die um *A* herumliegen, in 6 Teile, so erhält man für den einen Winkel *CAG* $^4/_6$ oder $^2/_3$ eines Rechten. Da aber alle Winkel im Dreieck *CAG* zusammen 2 Rechte oder $^6/_3$ Rechte betragen, so bleiben nach Abzug des Winkels *A* ($^2/_3$ Rechte von der Summe $^6/_3$) für die beiden Winkel bei *C* und *G* im ganzen $^4/_3$ Rechte übrig. Diese Winkel sind aber gleich, also bleiben für jeden $^2/_3$ Rechte, gerade soviel wie für den Winkel *A*. Wenn nun aber in einem Dreieck die Winkel gleich sind, so müssen auch die Seiten einander gleich sein. Daher ist die Seite des Sechsecks *CG* ebenso wie die des Dreiecks, das den sechsten Teil von ihm ausmacht, gleich dem Halbmesser *CA* oder *AG* des Kreises. Die Sechseckseite ist also in Länge aussprechbar, da sie gleich der Hälfte des Durchmessers ist. Nach Definition XIII ist dies der 2. Grad der Wißbarkeit.



Die Seite *BC* des Dreiecks *BCD* verbindet die beiden Sechseckseiten *CH* und *HB*, die in *H* zusammenstoßen. Da also *BHC* $^2/_3$ des Halbkreises und *CG* $^1/_3$ ist, ist der Bogen *BCG* ein Halbkreis und *BG* Durchmesser durch *A*. Also ist *BCG* ein rechter Winkel, nach Eukl. III, 31. Die Quadrate über *BC* und *CG* sind also zusammen gleich dem Quadrat über *BG*, nach Eukl. I, 47. *CG* ist aber gleich dem Halbmesser, also ist das Quadrat über *CG* der 4. Teil des Quadrats über *BG*. Zieht man also von diesem Quadrat den 4. Teil ab, so bleibt das Quadrat der Dreieckseite *BC* übrig. Dieses Quadrat ist also aussprechbar. Da es sich aber zu dem Quadrat über *BG* nicht wie eine Quadratzahl zu einer anderen solchen verhält, vielmehr wie 3 zu 4, ist *BC* nur in Potenz aussprechbar, nach Definition XIV.

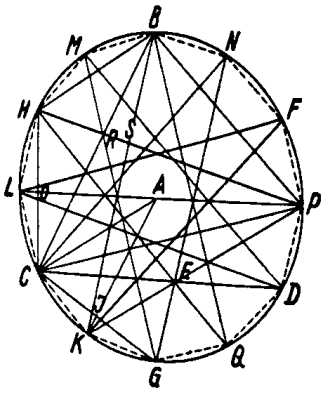
Da BC und BD sowie die Winkel BCD und BDC einander gleich sind, so teilt das Lot BE von B auf CD diese Strecke in die zwei gleichen Teile CE und ED. Da die ganze Strecke CD nur in Potenz aussprechbar ist, ist dies auch der Fall für ihre Hälfte CE. Also ist das Rechteck, das aus den nur in Potenz kommensurablen Strecken CE und AG gebildet wird, von denen die letztere in Länge aussprechbar ist, medial. Dieses Rechteck ist aber zweimal so groß wie das Dreieck CGA (das den 6. Teil des Sechsecks ausmacht); es ist also gleich dem 3. Teil des Sechsecks. Daher ist der Flächeninhalt des Sechsecks medial. Da ferner in den Dreiecken BCA und BCH die Seiten BA und BH sowie CA und CH gleich sind und BC beiden gemeinsam ist, sind ihre Inhalte einander gleich. BCH, BDF und CDG sind aber die Teile des Sechsecks, um die dieses über das Dreieck BCD hinausragt, das aus den gleich großen Dreiecken BAC, CAD und DAB besteht; also ist die Sechsecksfläche doppelt so groß wie die des Dreiecks. Somit ist auch die Dreiecksfläche medial, da sie kommensurabel ist zur medialen Sechsecksfläche.

XXXIX. SATZ.

Die Seiten des Zwölfecks und des gleichnamigen Sterns, d. h. der zu $^5/_{12}$ des Kreises gehörigen Sehne, lassen sich geometrisch beschreiben; sie sind, einem Kreis einbeschrieben, wißbar, und zwar einzeln je im 8. Grad der Wißbarkeit, zusammen im 5. Grad. Die Fläche des Zwölfecks aber ist aussprechbar.

$BMHLCKGQDPFN$ sei ein Zwölfeck, $BKFLDMGNCPHQB$ ein zwölfeckiger Stern.

Da zweimal sechs zwölf ist, läßt sich die Figur aus der Seite des Sechsecks nach denselben Regeln beschreiben wie vorher das Achteck aus der Viereckseite, indem man vom Mittelpunkt A auf die Sechseckseite HC das Lot fällt, das die Seite in O und den Kreis in L und P schneidet; die Zwölfeckseite erhält man, wenn man L und H verbindet, die Seite des Sterns, wenn man H und P verbindet.



Da nun die Sechseckseite HC in Länge aussprechbar ist, ist dies auch der Fall für ihre Hälfte HO. Das Quadrat über der Strecke AC aber, die gleich HC ist, ist gleich der Summe der Quadrate über der halb so großen Strecke OC und über der Strecke AO. Daher verhalten sich die Quadrate über AO und über AC oder AP wie 3 zu 4, also nicht wie zwei Quadratzahlen zueinander. Daher sind PA und AO sowie LA und AO zueinander nur in Potenz kommensurabel. Das Quadrat über der größeren aussprechbaren Strecke CA (oder PA, AL) übertrifft das Quadrat über der kleineren Strecke OA um das Quadrat der zu CA kommensurablen Strecke CO. Also ist nach der Definition vor Eukl. X, 48 die zusammengesetzte Strecke PO eine Binomiale, und die Differenz OL nach der Definition vor Eukl. X, 85 eine Apotome, beide von erster Art. Die Glieder sind AP, das einfach aussprechbar ist, und AO, das nur in Potenz aussprechbar ist. Da nun das Quadrat über HP gleich dem Rechteck aus der Binomiale erster Art OP und der aussprechbaren Strecke PL ist, ist HP nach Eukl. X, 54 eine Binomiale, während die Zwölfeckseite HL nach Eukl. X, 91 eine Apotome ist, da das Quadrat über HL gleich dem Rechteck aus der Apotome erster Art OL und der aus-

sprechbaren Größe LP ist. Daher gehören beide je für sich zu einem höheren Grad der Wißbarkeit, zum achten.

Die Glieder dieser Binomiale PH und der Apotome HL sind PS und SH. Da HB die Seite des Sechsecks, KP die des Dreiecks und BP die des Vierecks ist, so ist das Quadrat von HB doppelt so groß wie das Quadrat des kleineren Glieds, nämlich gleich der Summe der Quadrate von HS und SB, das Quadrat von KP ist doppelt so groß wie das Quadrat des größeren Glieds, nämlich gleich der Summe der Quadrate von KS und SP, und das Quadrat von BP ist gleich der Summe der Quadrate beider Glieder, nämlich gleich der Summe der Quadrate von BS und SP.

Die Binomiale PH läßt sich auch aus der Quadratseite PR und der Zwölfeckseite RH zusammensetzen. Doch kann man hinsichtlich dieser Zusammensetzung nicht von einer Binomiale reden, da es nach Eukl. X,42 nur einen Punkt, hier S, geben kann, der eine Strecke in ihre Glieder zerlegt.

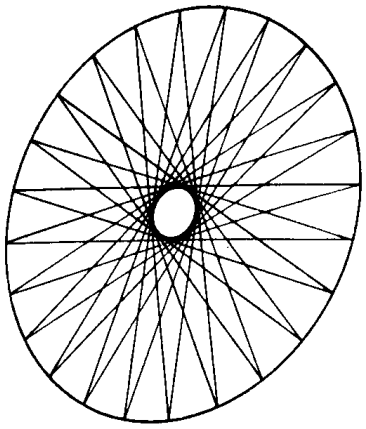
Da HO und LP in Länge aussprechbar sind, ist das Rechteck aus diesen Strecken, d. h. das Rechteck aus LH und HP aussprechbar; ebenso ist die Summe der Quadrate von LH und HP aussprechbar, da sie ja gleich dem Quadrat von LP ist. Daher sind LH und HP zusammen vom 5. Grad der Wißbarkeit. Ihre Summe oder Differenz ergibt nichts Neues, keine Binomiale oder Apotome. Denn wenn man LH zu HP addiert, erhält man eine nur in Potenz aussprechbare Größe, da ihr Quadrat das Anderthalbfache des Quadrats von LP ist. Zieht man aber LH oder HR von HP ab, so erhält man die ebenfalls in Potenz aussprechbare Quadratseite PR; das Quadrat von PR ist die Hälfte des Quadrats von LP.

Da die Fläche des Zwölfecks aus 12 Dreiecken von der Art von LAC besteht und in dem aussprechbaren Rechteck $LHPD$ vier solche Dreiecke, also ein Drittel der ganzen Fläche, enthalten sind, ist daher auch die ganze Fläche aussprechbar, nämlich dreimal so groß wie das Rechteck aus HO und LP. Sie ist also drei Viertel von dem Quadrat des Durchmessers oder das arithmetische Mittel zu dem umbeschriebenen und dem einbeschriebenen Viereck, während das Achteck das geometrische Mittel zu ihnen ist. †

XL. SATZ.

Die reguläre Figur mit 24 Seiten und alle Figuren, die man aus ihr durch fortgesetzte Verdopplung der Seiten erhält, lassen zwar eine geometrische Beschreibung zu, allein die Wißbarkeit der Seiten entfernt sich von den Graden, die wir früher aufgestellt haben; das gleiche gilt von den zugehörigen Sternfiguren, deren Seiten die zu $^5/_{24}$, $^7/_{24}$, $^{11}/_{24}$ des Kreises gehörigen Sehnen sind.

Der Beweis wird geführt, wie oben Satz XXXVII beim Sechzehneck, jedoch mit dem Unterschied, daß im vorliegenden Fall die Seite des zwölfeckigen Sterns wie ihre Hälfte eine Binomiale erster Art ist, so daß das Rechteck aus dieser Hälfte und dem Durchmesser (einer aussprechbaren Größe) nicht von einer neuen Art ist, da ja die Strecke, deren Quadrat gleich diesem Rechteck ist, nach Eukl. 54 ebenfalls eine Binomiale ist. Zieht man aber dieses Rechteck von dem aussprechbaren Rechteck aus Durchmesser und Halbmesser ab, so entsteht etwas Neues, das bisher keine Erwähnung fand, und zwar etwas dem Rang nach Niedrigeres, wegen der komplizierteren Zusammensetzung. Die Seite des Quadrats, das gleich der Differenz dieser Rechtecke ist, ist die Seite des 24-Ecks. †



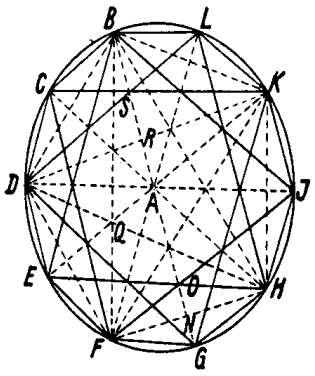
Noch mehr gilt das Gesagte von den Figuren dieser Klasse, die eine größere Seitenzahl haben, wie vom 48-, 96-Eck usw.

Die Sehne, die zu $^5/_{24}$ des Kreises gehört, ergibt sich durch Halbierung des Bogens, der $^5/_{12}$ des Kreises ausmacht. Zieht man das Quadrat dieser Sehne vom Quadrat des Durchmessers ab, so erhält man das Quadrat der Sehne, die zu $^7/_{24}$ des Kreises gehört. Ebenso erhält man aus dem Quadrat der Seite oder der Sehne, die zu $^1/_{24}$ des Kreises gehört, das Quadrat der Sehne, die zu $^{11}/_{24}$ des Kreises gehört. Alle diese Sehnen gehören daher einem niedrigeren Rang an.

XLI. SATZ.

Die Seite des Zehnecks und die des zehneckigen Sterns, d. h. die Sehne, die zu $^3/_{10}$ des Kreises gehört, lassen sich geometrisch aus den Ecken beschreiben und einem Kreis einbeschreiben; sie sind wißbar, und zwar je für sich vom 8. Grad der Wißbarkeit, zusammen vom 5. Grad; zusammen mit dem Halbmesser vom 4. Grad.

BCDEFGHJKL sei ein Zehneck und *BEHLDGKCFJB* der zugehörige Stern. Da die Figur 10 Ecken hat, besteht ihre Fläche aus 10 im Mittelpunkt *A* zusammenstoßenden Dreiecken von der Art des Dreiecks *FAG*. Verteilt man also die vier Rechte, die um *A* herumliegen, auf die Winkel an der Spitze der 10 Dreiecke, so kommen auf jeden $^4/_{10}$ oder $^2/_5$ Rechte. Nun aber ist die Winkelsumme eines Dreiecks $^{10}/_5$ oder 2 Rechte; zieht man $^2/_5$ Rechte hievon ab, so bleiben also für die beiden Basiswinkel $^8/_5$ übrig, und da diese gleich sind, so ist jeder $^4/_5$ Rechte. Daher ist jeder von diesen doppelt so groß wie der Winkel an der Spitze. Darauf beruht die folgende Darstellung.



Man teile den Winkel *AFG* durch *FO* in zwei gleiche Teile nach Eukl. I, 9. Dann sind die Winkel *AFO* und *OFG* einander gleich, und jeder ist $^2/_5$ Rechte. Es sind somit beide gleich *FAO*; daher verhält sich nach Eukl. VI, 3 *AO* zu *OG* wie *AF* zu *FG*.

Da aber *OFG* gleich $^2/_5$ Rechten und *OGF* (oder *AGF*) gleich $^4/_5$ Rechten ist, ist auch *FOG* gleich $^4/_5$ Rechten. Da somit die Winkel bei *O* und *G* einander gleich sind, sind auch die Seiten *FG* und *FO* gleich. Ebenso sind im Dreieck *AOF* die Seiten *AO* und *FO* (d. i. *FG*) gleich, da *AFO* und *FAO* je gleich $^2/_5$ Rechten sind. Da sich aber, wie bereits bewiesen, *AO* zu *OG* wie *AF* zu *FG* verhält, so verhält sich auch *AO* zu dem Rest *OG* wie *AG* zu *AO*. Es ist also *AG* in *O* stetig geteilt. Nach Eukl. XIII, 5 ist dann auch *FJ* in *O* stetig geteilt, wenn man *OA* oder *OF* bis *J* so verlängert, daß *OJ* gleich *AG* ist. Verbindet man *A* mit *J*, so ist also *AJO* dem Ausgangsdreieck *FAG* kongruent und der Winkel *OAJ* doppelt so groß wie *FAO* und der Winkel *FAJ* gleich $^6/_5$ Rechten. Beschreibt man daher um *A* mit *AG* den Kreis *FGJ*, so ist *FG*, die Zehneckseite, gleich dem größeren Abschnitt des stetig geteilten Halbmessers *AG* und *FJ*, die Seite des Sterns oder die zu $^3/_{10}$ des Kreises gehörige Sehne, gleich der Summe der Zehneckseite *FO* und des Halbmessers *OJ*.

Diesem Sachverhalt entsprechend sind diese Seiten, zusammen mit dem Halbmesser, nach Definition XXVI dem 4. Grad der Wißbarkeit zuzurechnen.

Da AG in Länge aussprechbar, die Zehneckseite der größere Abschnitt davon und die Seite des Sterns aus dem Ganzen und dem größeren Abschnitt zusammengesetzt sind, so ist jene nach Satz XXVII eine Apotome, diese eine Binomiale, beide je von vierter Art. Sie sind also vom 8. Grad der Wißbarkeit; sie kommen gleich nach der Seite des Zwölfecks und der des zugehörigen Sterns und rangieren gleich wie die Seite des Achtecks und die des zugehörigen Sterns.

Nach Satz XXVIII ist der kleinere Abschnitt OG wie auch seine Hälfte NG eine Apotome erster Art. Man darf aber ja nicht glauben, daß die Glieder dieser Apotome AG und AN sind.

Schließlich sind nach Satz XXVII die Seiten GF oder OF und FJ, nicht mit dem Halbmesser, sondern miteinander verbunden, vom 5. Grad der Wißbarkeit, da die Summe ihrer Quadrate und das Rechteck aus ihnen aussprechbar sind.

Daher ist die Summe der Zehneckseite und der Seite des zugehörigen Sterns nur in Potenz aussprechbar; das Quadrat dieser Summe ist $^5/_4$ vom Quadrat des Durchmessers. In der Figur zu Satz XXVII entspricht dieser Summe die Strecke PX, die aus den beiden Strecken PA (gleich OA) und AX zusammengesetzt ist, deren mittlere Proportionale GA aussprechbar ist.

Andererseits ist die Differenz der Seite FJ des Sterns und der Zehneckseite OF aussprechbar, nämlich gleich dem Halbmesser. So ergibt sich also aus Sternseite und Zehneckseite nichts Neues. †

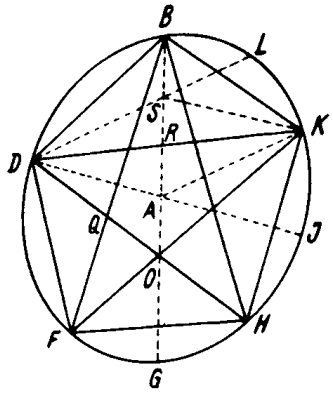
XLII. SATZ.

Die Seite des Fünfecks und die des fünfeckigen Sterns, d.h. die zu $^2/_5$ des Kreises gehörige Sehne, lassen eine geometrische Beschreibung aus den Ecken zu; sie sind wißbar, und zwar einzeln im 8. Grad, zusammen sowohl im 6. als im 4. Grad der Wißbarkeit.

Die Beschreibung außerhalb eines Kreises erfolgt so: Es sei die Seite des Fünfecks in ihrer Länge gegeben. Wir teilen sie stetig nach Eukl. II,11 oder VI,30 und addieren zu ihr den größeren Abschnitt. Macht man nun in einem Dreieck zwei Schenkel je gleich dieser Summe und die Basis gleich der gegebenen Strecke, so erhalten wir damit das innere Dreieck des Fünfecks. (In der Figur sind FB und BH die Schenkel und FH die Basis). Da der Schenkel aus der gegebenen Strecke und dem größeren Abschnitt dieser stetig geteilten Strecke besteht, so ist er auch selber stetig geteilt, und sein größerer Abschnitt ist die gegebene Strecke. Daher ist der Basiswinkel in jenem Dreieck doppelt so groß wie der Winkel an der Spitze, wie oben beim Zehneck. Nun fügen wir unserem Dreieck außen an die Schenkel als Grundlinien noch zwei Dreiecke an, in denen die Schenkel gleich der gegebenen Strecke sind (in der Figur FDB über FB und BKH über BH).

Die Konstruktion in einem Kreis erfolgt sehr leicht mit Hilfe der Zehneckseite. Da 5 die Hälfte von 10 ist, verbinden wir die Endpunkte F und H der zwei in G zusammenstoßenden Zehneckseiten FG und GH; dann ist FH die Seite des Fünfecks, ebenso HK. Verbindet man die Endpunkte F und K, so erhält man die Seite FK des Sterns. Es sei also $BDFHK$ das Fünfeck und $BFKDHB$ der Stern.

Euklid beweist nun im Buch XIII, 10, daß das Quadrat der Fünfeckseite FH gleich der Summe der Quadrate der Sechseckseite FA und der Zehneckseite FG, d. h. der Quadrate des Halbmessers AG und seines größeren Abschnitts GO ist. Der Beweis bei Euklid bereitet dem Verständnis einige Schwierigkeit; ich möchte daher im folgenden einen leichteren versuchen.



Man ziehe von den Endpunkten B, D einer Fünfeckseite aus durch den Mittelpunkt A die Geraden BG und DJ. Die zu DB, DL und DK gehörigen Bögen machen der Reihe nach $^2/_{10}$, $^3/_{10}$, $^4/_{10}$ des Kreises aus; DL und DK schneiden BG in S und R. Nun ist Winkel LDJ oder SDA gleich $^2/_5$ Rechten, da LJ, ebenso wie FH, gleich $^1/_5$ des Kreises ist und zu gleichen Bögen gleiche Umfangswinkel gehören, nach Eukl. III, 21 und 27. Winkel DAB oder DAS aber ist $^4/_5$ Rechte, weil DB $^1/_5$ des Kreises ist, der um A herum 4 Rechte mißt. Also ist die Summe von SAD und ADS gleich $^6/_5$ Rechten. Da aber alle Winkel im Dreieck zusammen 4 Rechte sind, ist der dritte Winkel DSA gleich $^4/_5$ Rechten. Die Winkel DSA und DAS sind also einander gleich, und die Seite DS ist gleich dem Halbmesser DA. Daher ist nach dem früheren SA gleich dem größeren Abschnitt des stetig geteilten Halbmessers DA, somit gleich der Zehneckseite, während DA Halbmesser, d. h. Sechseckseite, ist. Ich behaupte nun, das Quadrat der Fünfeckseite DB ist gleich der Summe der Quadrate von SA und AD.

Man verbinde K mit S und A. Da DA und AK einander gleich und DS und SK diesen Strecken gleich sind, sind auch die Strecken SR und RA einander gleich und DRB ein Rechter. Daher ist das Quadrat von DB gleich der Summe der Quadrate von DR und RB. Nun aber ist das Quadrat von DR gleich der Differenz der Quadrate von DA und RA, und das Quadrat von BR ist gleich dem Quadrat von BA minus der Summe des doppelten Rechtecks aus BR und RA und des Quadrats von RA. Die Summe der Quadrate von DR und RB ist also gleich der Summe der Quadrate von DA und AB minus dem doppelten Rechteck aus RA und AB oder dem einfachen Rechteck aus SA und AB. Nun aber bilden die beiden Rechtecke aus SA, AB und SB, BA das ganze Quadrat von BA. Zieht man also von jener Summe das Rechteck aus SA und AB ab, so bleibt die Summe des Quadrates von DA und des Rechtecks aus SB und BA übrig, und diese Summe ergibt sich gleich dem Quadrat von DB. Da aber der Halbmesser BA in S stetig geteilt und AS der größere Abschnitt ist, ist das Rechteck aus SB und BA gleich dem Quadrat von SA. Somit ist das Quadrat der Fünfeckseite gleich der Summe der Quadrate von DA und AS, d. h. der Sechseck- und der Zehneckseite.

Was die Seite BF des fünfeckigen Sterns anlangt, so ist diese zusammengesetzt aus BD oder BQ, der Fünfeckseite, und aus QF, dem größeren Abschnitt dieser stetig geteilten Fünfeckseite, nach Eukl. XIII, 8, was sich auch † wie oben aus dem Fünfecksdreieck FBH beweisen läßt.

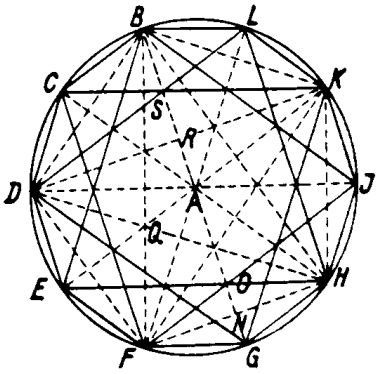
Es ist also das Quadrat der Fünfeckseite gleich dem Quadrat des Halbmessers, der in Länge aussprechbar ist, plus dem Quadrat des größeren Abschnitts des stetig geteilten Halbmessers. Nun ist in unserer früheren Halbkreisfigur das Quadrat von PG gleich der Summe der Quadrate von PA und AG. † Da sich aber die Fünfeckseite PG zur Seite des zugehörigen Sterns wie PA zu

AG verhält und das Verhältnis von PA zu AG gleich dem Verhältnis von PG zu GX ist, so stellt GX die Seite des Sterns dar, und das Quadrat von GX ist gleich dem Quadrat des Halbmessers GA des um das Zehneck beschriebenen Kreises plus dem Quadrat der aus PA und AG zusammengesetzten Strecke AX. Daher ist nach dem früher Bewiesenen GX eine Major, GP eine Minor. Beide Strecken sind also je vom 8. Grad der Wißbarkeit, und zwar von dessen 2. Ordnung. Da aber die Summe der Quadrate von PG und GX aussprechbar, nämlich gleich dem Quadrat von PX ist, das das Fünffache des aussprechbaren Quadrats von GA ist, und da ferner die beiden Strecken PG und GX ein mediales Rechteck bilden, sind PG und GX miteinander vom 6. Grad der Wißbarkeit, von dem in Nr. XVIII die Rede war. Und schließlich, da die Seite des Fünfecks und die Seite des Sterns sich zueinander verhalten wie der größere Abschnitt und das Ganze beim göttlichen Schnitt, gehören sie miteinander auch zum 4. Grad der Wißbarkeit (siehe Nr. XXIX). Daraus folgt, daß wie die Fünfeckseite eine Minor und die Sternseite eine Major, so auch ihre Summe wiederum eine Major und die Fünfeckseite zu dieser Major das kleinere, die Sternseite aber das größere Element ist, ebenso daß die Differenz DQ oder QF beider Seiten eine Minor ist, ebenfalls nach Nr. XXIX.

XLIII. SATZ.

Die Flächen des Zehnecks und des Fünfecks gehören entfernteren Graden der Wißbarkeit an, wie auch die Seiten des Zwanzigecks und der übrigen Figuren dieser Klasse.

Denn das Rechteck aus der Fünfeckseite FH und aus AN ergibt das doppelte Dreieck FAH, das gleich dem 5. Teil der Fläche des Fünfecks ist. Nun ist aber FH eine Minor und das Quadrat von AN ist gleich der Differenz der Quadrate der aussprechbaren Strecke AF und der Minor FN. Wenn man aber das Quadrat einer Minor von dem einer Aussprechbaren abzieht, ist die Strecke, deren Quadrat gleich dem Quadrat einer solchen Differenz ist, von neuer Art. Das Rechteck, das eine solche neue Strecke und eine Minor miteinander bilden, gehört einer noch weiter entfernten Art an. Nun aber ist die Fläche des Fünfecks diesem Rechteck kommensurabel (es verhält sich zu diesem wie 5 zu 2), daher gehört sie ebenfalls der weiter entfernten Art an. Ebenso ist das Produkt aus der Zehneckseite FG und aus dem Lot von A auf FG doppelt so groß wie der 10. Teil FAG des Zehnecks, d. h. ein Fünftel davon. FG ist aber eine 4. Apotome, und das Quadrat des Lotes vom Mittelpunkt aus ist um den 4. Teil des Quadrats dieser Apotome kleiner als das Quadrat des Radius. Nimmt man aber das Quadrat einer Apotome von dem einer aussprechbaren Strecke weg, so ist die Strecke, deren Quadrat gleich dem Quadrat dieser Differenz ist, von einer neuen Art, die unter den aufgeführten Arten nicht mehr vorkommt. Und wenn man aus dieser Strecke und der Apotome ein Rechteck bildet, so ist dieses und damit auch sein Fünffaches, d. h. die Zehnecksfläche, von einer noch weiter entfernten Art.



Die halbe Zehneckseite ist also eine vierte Apotome. Verwandelt man das Quadrat dieser Apotome in ein Rechteck von der Länge des Durchmessers (einer in Länge aussprechbaren Strecke), so wird die Breite des Rechtecks, d. h. die

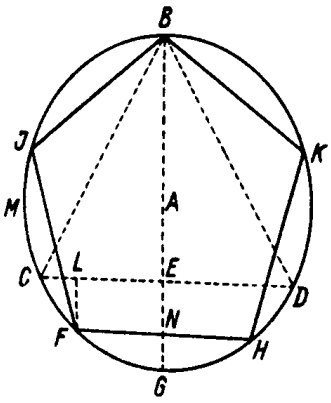
† Pfeilhöhe eines Kreiszehntels, eine erste Apotome. Das Quadrat der Seite des Zwanzigecks ist dann gleich der Summe der Quadrate der halben Zehneckseite, einer vierten Apotome, und dieser Pfeilhöhe, einer ersten Apotome. Nun gibt es aber unter den früher aufgezählten Arten keine Strecke, deren Quadrat gleich einer Fläche wäre, die aus Apotomen verschiedener Art, d. h. aus inkommensurabeln Apotomen zusammengesetzt ist. Das leistet nur eine Strecke, die vollkommen neuer Art und daher von niedrigerem Rang ist.

Um wieviel mehr wird dies für das 40-Eck und die anderen Vielecke dieser Klasse gelten?

XLIV. SATZ.

Die Seite des Fünfzehnecks und die Seiten der zugehörigen Sterne, die gleich den Sehnen von $^{2}/_{15}$ oder $^{4}/_{15}$ oder $^{7}/_{15}$ des Kreises sind, lassen zwar eine geometrische Beschreibung zu, aber nicht außerhalb des Kreises und auch innerhalb des Kreises nicht aus den Ecken. Ihre Beschreibung ist also eine uneigentliche, und die Wißbarkeit ist heterogen, von einem entfernteren Grad als die aller vorausgehenden Strecken. Das Dreißigeck und die übrigen Vielecke dieser Klasse gehören noch weiter entfernten Graden an.

Die Beschreibung geschieht mittels früher aufgeführter Figuren, deren Seitenzahl aber nicht durch Verdopplung gewonnen sein darf; denn 15 ist ungerade; die Hälfte davon ist keine ganze Zahl. Man braucht das Dreieck BCD und das Fünfeck $BJFHK$, die beide mit dem Punkt B anfangen. Denn wenn man BC gleich $^{1}/_{3}$ des Kreises von BJF gleich $^{2}/_{5}$, d. h. $^{5}/_{15}$ von $^{6}/_{15}$, abzieht, so bleibt CF gleich $^{1}/_{15}$ des Kreises übrig. Verbindet man also C mit F, so wird die Linie CF die Seite sein. Man verwendet hier bei der Beschreibung nicht die Größe des Winkels, noch die Zahl der Ecken der gesuchten Figur; auch bildet man nicht entsprechend dieser Zahl irgendein Dreieck, wie dies bei den früheren Vielecken geschah. Doch läßt sich das Fünfzehneck nicht auf andere Weise beschreiben. Seine Wißbarkeit ist daher von niedrigem Rang. Die Seite FH des Fünfecks ist zur Dreieckseite CD parallel, da beide Vielecke von ungerader Seitenzahl die Ecke B gemeinsam haben. Man fälle nun von F aus das Lot bis L und ziehe von B aus durch A den Durchmesser, der die Schnittpunkte ENG ergibt. Dann ist das Quadrat der Seite CF gleich der Summe der Quadrate von CL und FL. CL aber ist der Überschuß der in Potenz aussprechbaren Strecke CE über die Minor FN oder LE. CL ist daher von einer völlig neuen Art. Ferner ist das Quadrat von AN gleich der Differenz einer aussprechbaren Fläche und des Quadrats einer Minor; es ist also AN von neuer Art. EN ist aber die Differenz dieser neuartigen Strecke und der in Länge aussprechbaren Strecke AE. EN ist also von zweimal entfernterem Grad. Schließlich ist das Quadrat der Fünfzehneckseite CF gleich der Summe der Quadrate der neuartigen Strecken CL und EN. Daher ist CF wegen CL zweimal, wegen EN dreimal, im ganzen also fünfmal weiter entfernt. Außerdem verschmelzen die Eigenschaften der verschiedenen Klassen, der Dreiecks- und der Fünfecksklasse miteinander; daher ist die Wißbarkeit heterogen. Was muß man dann vollends vom Dreißigeck denken, wo doch der † Grad der Wißbarkeit mit der Verdopplung der Seiten immer weiter hinausrückt!



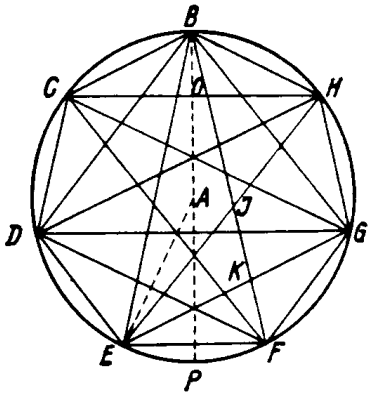
Die Sehne zu $^{7}/_{15}$ oder $^{14}/_{30}$ des Kreises hängt von der Seite des Dreißigecks ab, sie rangiert also nach dieser. Die Sehne zu $^{7}/_{30}$ des Kreises erhält man daraus durch Halbierung; aus dieser leitet man ab die Sehne zu $^{8}/_{30}$ oder $^{4}/_{15}$, daraus wieder die zu $^{2}/_{15}$ durch Halbierung, wenn man diese auch auf andere Weise gewinnen kann; so ist z. B. das Quadrat von *MF* zusammengesetzt aus dem Quadrat von *CF*, der Seite des Fünfzehnecks, und aus dem Rechteck aus *CF* und der Fünfeckseite *FJ*. Beidemal ergibt sich etwas von niedrigerem Rang † als bei den früheren Figuren.

XLV. SATZ.

Das Siebeneck und alle Figuren, deren Seitenzahlen (sogenannte) Primzahlen größer als sieben sind, sowie die zugehörigen Sterne und die von ihnen abgeleiteten Klassen lassen keine geometrische Beschreibung außerhalb des Kreises zu. Im Kreis besitzen die Seiten zwar notwendig eine bestimmte Größe, aber diese kann nicht wißbar sein. †

Es handelt sich hier um eine wichtige Sache. Denn hierin ist der Grund beschlossen, warum Gott das Siebeneck und die anderen Figuren dieser Gattung nicht wie die im vorausgehenden aufgeführten erkennbaren Figuren zum Schmuck der Welt verwendet hat.

Es sei nun *BCDEFGH* ein Siebeneck und man verbinde eine jede Ecke mit allen anderen Ecken. *A* sei der Mittelpunkt des Kreises, *BAP* ein Durchmesser; *A* verbinde man mit *E*.



Fürs erste lassen derartige Figuren eine uneigentliche Beschreibung wie vorhin nicht zu. Denn ihre Seiten- und Eckenzahl ist eine Primzahl und kein Paar der früher betrachteten Figuren teilt den Kreis in solche Teile, deren Anzahl eine Primzahl ist; vielmehr liefern diese Paare jeweils Vielfache der Seitenzahlen der einzelnen Figuren.

Aber auch eine eigentliche Beschreibung aus der Zahl der Ecken lassen die genannten Figuren nicht zu, da alles, was man aus dieser Zahl herausholen kann, durchaus unbestimmt und vieldeutig ist.

Man zerlege nämlich das Siebeneck in seine fünf Dreiecke, die beiden äußeren gleichschenkligen und stumpfwinkligen *BDC* und *BGH*, das gleichschenklige und spitzwinklige *BEF* in der Mitte und die zwei ungleichseitigen *BED* und *BFG* dazwischen. Da nun der Bogen, über dem die Schenkel eines Winkels stehen, dessen Spitze im gegenüberliegenden Bogen liegt, ein Maß angibt für die Größe des Winkels, steht der Winkel *BEF* über den 3 Teilen *BH*, *HG*, *GF* des Umfangs, der Winkel *BFE* gleichfalls über 3 Teilen *BC*, *CD*, *DE*, der Winkel *EBF* aber über dem einen Teil *EF*; somit ist *BEF* ein Dreieck, in dem jeder Winkel an der Grundlinie das Dreifache von dem an der Spitze beträgt. In gleicher Weise zeigt man, daß sich die Winkel in dem ungleichseitigen Dreieck *BED* fortlaufend wie eins zu zwei verhalten. Denn der Winkel *E* ist das Doppelte von Winkel *B*, der Winkel *D* das Vierfache von *B* oder das Doppelte von *E*.

Wenn nun das Siebeneck eine bestimmte Beschreibung außerhalb des Kreises zuließe ebenso wie früher das Fünfeck, so ist vor allem erforderlich (wie schon Campanus, Hieronymus Cardanus und Flussates Candalla erwähnt haben), †

daß es derartige Dreiecke gibt wie vorher das Fünfecksdreieck, bei dem die Winkel an der Grundlinie ja doppelt so groß wie der Winkel an der Spitze waren. Während sich nun aber bei diesem Fünfecksdreieck aus den Winkeln ein bestimmtes Verhältnis für die Seiten ergab, ist hier bei unserem Siebenecksdreieck ein solches bestimmtes Verhältnis nicht vorhanden. Es seien J und K die Punkte, in denen die Linien EH und EG, die den Winkel BEF in 3 gleiche Teile teilen, BF schneiden. Da also im Dreieck FEJ der Winkel FEJ halbiert ist, verhält sich FK zu KJ wie FE zu EJ. EF aber ist gleich der ganzen Strecke FJ. Denn es ist Winkel FEJ gleich $^4/_7$ Rechten und EFJ gleich $^6/_7$ Rechten; daher ist EJF gleich $^4/_7$ Rechten, und die den beiden gleichen Winkeln gegenüberliegenden Schenkel FE und FJ sind einander gleich. In gleicher Weise sind auch EJ und JB einander gleich. Daher verhält sich FK zu KJ wie FJ zu JB. Da ferner im Dreieck KEB Winkel KEB durch EJH halbiert ist, verhält sich KJ zu JB wie KE zu EB. Nun aber sind KE und FE einander gleich, weil Dreieck KEF gleichschenklig und dem Dreieck EBF ähnlich ist; es war aber EF gleich JF und EB ist gleich FB. Daher verhält sich auch KJ zu JB wie JF zu FB. So hat man also für die drei Abschnitte auf der zu $^3/_7$ des Kreises gehörigen Sehne BF zwei Proportionen gefunden: Erstens verhält sich der größte Abschnitt JB zur Summe JF der beiden kleineren, d. h. zur Siebeneckseite FE, wie der mittlere KJ zum kleinsten KF. Zweitens verhält sich die ganze Strecke BF zur Summe FJ der beiden kleineren Abschnitte wie der größte Abschnitt JB zum mittleren JK. Aus diesen Proportionen scheint sich nun zwingend ein ganz bestimmtes Verhältnis von EF zu FB zu ergeben. Cardanus ließ sich auch hiedurch täuschen, als er etwas Derartiges am schiefwinkligen Dreieck BED bemerkt hatte; er sprach von einer „reflexen Proportion". Allein er hat sich umsonst gerühmt. Denn es trifft nicht zu, daß sich ein bestimmter Wert von EF oder JF hieraus ergibt, weil das, was die zweite Proportion liefert und was wir für etwas Neues halten, mit dem zusammenfällt, was die erste liefert. Denn immer wenn unter 4 Proportionalen die dritte gleich der Summe der beiden ersten ist, geschieht es, daß das Verhältnis der ersten zur dritten oder der zweiten zur vierten gleich ist dem Verhältnis der dritten zur Summe der dritten und vierten, die als fünfte Größe auftritt. Solche Fälle gibt es jedoch unendlich viele, sowohl mit kommensurablen als auch mit inkommensurablen Gliedern. Im besonderen ist die Zahl der Fälle mit kommensurablen Gliedern gleich der Zahl der „proportiones superparticulares", d. h. gleich der Zahl der ungeraden Quadratzahlen

BF	9	BJ 6	JK 2	KF 1
oder	25	15	6	4
oder	49	28	12	9
oder	81	45	20	16
oder	121	66	30	25 usw.

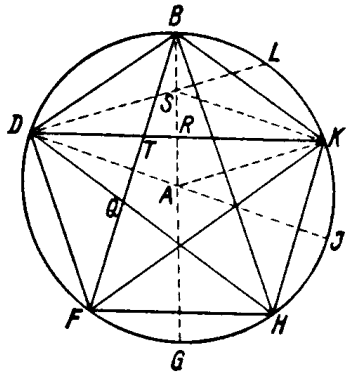
sowie der Zahl der „prop. superpartientes"

49	35	10	4
64	40	15	9 usw.

Denn wie sich 15 zu 9 verhält, so 40 zu 24, der Summe von 15 und 9. Und wie sich 40 zu 15 verhält, so 64 (zusammengesetzt aus 40, 15 und 9) zu 24, der Summe † von 15 und 9.

Alle diese vielen Proportionen haben eine gemeinsame Eigenschaft, eine Eigenschaft, die notwendig erfüllt ist, wenn das Siebeneck konstruiert vorliegt, aus der allein aber das Siebenecksdreieck nicht konstruiert werden kann. Der

Grund, warum im Fünfeck sich aus den Winkeln ein bestimmtes Verhältnis für die Seite ergibt, und zwar auch außerhalb des Kreises, im Siebeneck und den anderen Vielecken dieser Art dagegen nicht, geht leicht aus dem Vorausgehenden hervor. Im Fünfecksdreieck BFK gelangt man durch Halbierung des Winkels BKF sofort zu den beiden gleichschenkligen Elementardreiecken BKT und KTF und aus der Gleichheit der Winkel BFK und BKT folgt die Gleichheit der Seiten BK, KT, TF. Im Siebeneck (Fig. S. 45) dagegen erhält man durch die Dreiteilung des Winkels drei Elementardreiecke, die zwei gleichschenkligen Dreiecke BEJ und KEF und das schiefwinklige Dreieck JEK; dabei folgt aber das Verhältnis der Seiten nicht dem Verhältnis der Winkel, wie die Geometrie zeigt. Da also die Winkel dieser Figur nichts darüber aussagen, wie man außerhalb des Kreises vorzugehen hat, kann man das verlangte Dreieck außerhalb des Kreises nicht konstruieren. Es ist daher nicht möglich, diese Figur in einen Kreis einzubeschreiben mit Hilfe einer vorausgehenden Figur, die man wissen oder beschreiben könnte. Vielmehr wird eben erst dadurch, daß man das Siebeneck in irgendeiner vagen Form dem Kreis einbeschreibt, die oben angeführte Proportion auf einen einzelnen Fall eingeengt. Man begeht damit also eine Petitio principii; d. h. um das zu finden, womit die Einbeschreibung ausgeführt wird, muß man die Einbeschreibung selber verwenden, wie wenn sie zuvor möglich wäre.



Das Verhältnis der Seite EF zur Sternseite FB steckt also ganz in der quantitativen Materie. D. h. zufolge dem Materialprinzip der Quantitäten, das in der unbestimmten Größe liegt, ist es zwar möglich, die Siebeneckseite im richtigen Verhältnis zum Kreisdurchmesser zu konstruieren, da im Kreis irgend etwas, was größer als die bestimmte Siebeneckseite ist, und etwas, was kleiner ist, gegeben ist; setzt man die Teilung ins Unendliche fort, so erhält man auch immer etwas, was größer oder was kleiner ist als die Seite EF. Allein zufolge dem, was bei den Quantitäten formal ist, ist jene Konstruktion schlechthin unmöglich, da es für die Figur des Siebenecks und ähnlicher Vielecke an jeglichem Mittel, ein bestimmtes Verhältnis der Seite darzustellen und aufzufinden, und somit an ihrer Formation oder wißbaren Bestimmung durchaus fehlt. Man kann also weder die Figur mit 14 Ecken mit der Seite EP in einen Kreis vom Halbmesser AP einbeschreiben, noch die zu zwei aufeinanderfolgenden Seiten dieser Figur gehörige Sehne EF, die Siebeneckseite in jenem Kreis, konstruieren. Diese Seite kann mit dem Durchmesser nicht verglichen werden, da ihr Verhältnis zum Durchmesser ihrer Natur nach unbekannt ist. Daher hat noch nie jemand mit Wissen und Willen nach einem vorsätzlichen Plan ein Siebeneck konstruiert, und es ist unmöglich, ein solches nach einem vorsätzlichen Plan zu konstruieren. Es kann zwar geschehen, daß es zufällig herauskommt; man kann dabei aber in keiner Weise entscheiden, ob es wirklich konstruiert ist oder nicht.

Man kann mir nun hier die analytische Lehre entgegenhalten, die nach dem Araber Geber „Algebra", mit einem italienischen Wort „cossa" genannt wird. Darnach ist es möglich, wie es den Anschein hat, die Vieleckseiten jeglicher Art zu bestimmen. Jost Bürgi, der Mechanicus des Kaisers und des Landgrafen von Hessen, der auf diesem Gebiet sehr geistreiche und überraschende Entdeckungen gemacht hat, geht, um ein Beispiel anzuführen, beim Siebeneck

folgendermaßen vor. Zunächst weist er (Fig. S. 45) dem Durchmesser des Kreises BP die Zahl 2 zu, so daß AB die Einheit ist, in der die Länge der Seite BC ausgedrückt wird, wenn man diese Einheit ad infinitum in Teile zerlegt. Sodann nimmt er an, das Verhältnis AB zu BC sei bekannt, obwohl es erst gesucht ist. Dieses Verhältnis setzt er stetig fort, so daß sich verhält AB 1. zu BC 1 ℬ wie 1 ℬ zu 1 ♭, wie 1 ♭ zu 1 ℭ, wie 1 ℭ zu 1 ♭♭, wie 1 ♭♭ zu 1 ♭ ℭ und so immer weiter. Wir wollen dies in bequemerer Weise mit Indizes bezeichnen:

† 1 . 1 j . 1 ij . 1 iij . 1 $iiij$. 1 v . 1 vj . 1 vij . usw.

Danach betrachte man zuerst das Viereck $BEDC$. Von Ptolemäus, Kopernikus, Regiomontanus, Pitiscus und den anderen Verfassern, die über die Sinuslehre geschrieben haben, ist bewiesen worden, daß in jedem Kreisviereck das eine Rechteck aus den Diagonalen CE, DB gleich ist der Summe der beiden Rechtecke aus je zwei Gegenseiten DC, EB, und CB, DE. Ferner ist aus der Geometrie † bekannt, daß die Summe der Quadrate über CO, der Hälfte der Sehne CH und über dem Pfeil OB gleich ist dem Quadrat über der Seite CB.

Es sei nun BP gleich 2, CB gleich 1 j, das Quadrat hievon 1 ij. Man teile dieses durch BP, so erhält man BO gleich 1 ij geteilt durch 2. Das Quadrat hievon ist 1 $iiij$ geteilt durch 4. Ziehe dieses von dem Quadrat von CB 1 ij ab, so erhält man als Rest 4 ij — 1 $iiij$ geteilt durch 4, d. i. das Quadrat von CO. Da aber CH das Doppelte von CO ist, ist das Quadrat von CH gleich 16 ij — 4 $iiij$ geteilt durch 4, d. h. 4 ij — 1 $iiij$.

Damit hat man also das Quadrat von CH oder BD, d. h. das Rechteck aus BD und CE. Nun multipliziere man CB in DE, so daß das Rechteck hieraus 1 ij wird. Dieses subtrahiere von dem Rechteck aus BD, CE 4 ij — 1 $iiij$. Der Rest ist das Rechteck aus CD, BE 3 ij — 1 $iiij$. Dieses teile durch 1 j, d. h. durch CD, so erhält man BE gleich 3 j — 1 iij.

Nun gehen wir zum Viereck $DBHE$ über. Da BE gleich 3 j — 1 iij ist, ist das Rechteck aus BE, DH, d. h. das Quadrat von BE, gleich 9 ij — 6 $iiij$ + 1 vj. Davon subtrahiere das Rechteck aus BH, DE 1 ij. Der Rest ist das Rechteck aus BD, EH 8 ij — 6 $iiij$ + 1 vj. Dieses teile durch EH 3 j — 1 iij. Man erhält dann BD gleich 8 ij — 6 $iiij$ + 1 vj geteilt durch 3 j — 1 iij. Das Quadrat hievon ist 64 $iiij$ — 96 vj + 52 $viij$ — 12 x + 1 xij geteilt durch 9 ij — 6 $iiij$ + 1 vj. Früher war dieses Quadrat aber gleich 4 ij — 1 $iiij$. Multipliziert man dieses mit jenem Nenner, so wird sein

36 $iiij$ — 33 vj + 10 $viij$ — 1 x gleich 64 $iiij$ — 96 vj + 52 $viij$ — 12 x + 1 xij.
Also auch 63 vj + 11 x gleich 28 $iiij$ + 42 $viij$ + 1 xij.
Also auch 63 ij + 11 vj gleich 28 + 42 $iiij$ + 1 $viij$.

Diese Gleichung liefert die Seite des Siebenecks.

Man kann aber auch zu DB, EG übergehen. Es ist nämlich das Quadrat von DG oder EB gleich 9 ij — 6 $iiij$ + 1 vj. Das Quadrat von DB oder EG ist gleich 4 ij — 1 $iiij$. Ziehe das letztere vom ersteren ab, so wird das Rechteck aus DE, BG gleich 5 ij — 5 $iiij$ + 1 vj. Dieses teile durch DE 1 j; dann wird BG gleich 5 j — 5 iij + 1 v. Das Quadrat hievon ist 25 ij — 50 $iiij$ + 35 vj — 10 $viij$ + 1 x. Früher war dieses gleich 4 ij — 1 $iiij$. Also ist

† Also auch 49 $iiij$ + 10 $viij$ gleich 21 ij + 35 vj + 1 x.
49 ij + 10 vj gleich 21 + 35 $iiij$ + 1 $viij$.

Hier gibt wiederum die Gleichung die Größe der Siebeneckseite. Allein Bürgi wendet seinen Blick ab vom ganzen Kreis und betrachtet diesen nur wie

einen Bogen, der in 7 Teile zu zerlegen ist. Nachdem durch jenes cossische Verfahren die zu 2 Teilen gehörige Sehne bestimmt ist, sucht er nun die zu 4 Teilen gehörige Sehne; er findet dafür (nach demselben Verfahren wie oben) den Wert Wurzel aus $16\,ij - 20\,iiij + 8\,vj - 1\,viij$. Hierauf macht er Gebrauch von der Diagonale in einem neuen Viereck, dessen Seiten zwei zu 3 Teilen gehörige Sehnen sind. Das Rechteck aus diesen beiden ist daher $9\,ij - 6\,iiij + 1\,vj$. Subtrahiert man dieses Rechteck von dem Rechteck $16\,ij - 20\,iiij + 8\,vj - 1\,viij$, so bleibt als Rest für das Rechteck aus den beiden anderen Seiten $7\,ij - 14\,iiij + 7\,vj - 1\,viij$. Diese Sehne nimmt nun Bürgi her und vergleicht sie entweder mit der Zahl, durch die die Sehne des in 7 Teile zu zerlegenden bestimmten Bogens ausgedrückt wird, oder mit der Ziffer Null, wenn der ganze Kreis, wie hier, in 7 Teile zu teilen ist. Es sind also die Größen

$$7\,j - 14\,iij + 7\,v - 1\,vij \text{ oder } 7 - 14\,ij + 7\,iiij - 1\,vj$$

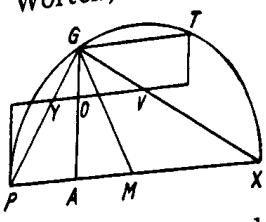
gleich entweder jener Zahl oder der Ziffer Null. †

Es ergibt sich aber für Bürgi aus der Gleichung, die er auf mechanischem Wege befriedigt, nicht nur ein Wurzelwert, sondern im Fünfeck 2, im Siebeneck 3, im Neuneck 4 usw. Im Siebeneck z. B. ist der eine Wert *BC*, der zweite *BD*, der dritte *BE*. †

Um zu zeigen, daß diese Art, die Seiten einer Figur aufzusuchen, gar nichts gemein hat mit unseren früheren Definitionen I, II und III, beachte man zuerst, was denn die cossische Sehne des Bürgi eigentlich besagt. Sie hat doch folgende Bedeutung: Bildet man 7 Größen in einer fortlaufenden Proportion mit dem Verhältnis, in dem die Siebeneckseite zum Kreishalbmesser steht, wobei die erste der Proportionalen die Siebeneckseite selber sein soll, dann machen 7 erste Größen zusammen mit 7 fünften ebensoviel aus, wie 14 dritte zusammen mit einer siebten. Diese Aussage ist nun zwar geometrisch und beweisbar, ebenso wie früher, als bewiesen wurde, die Fläche des Achtecks sei eine Mediale oder die Seite des Zwölfecks sei eine Apotome von einer Strecke. Denn dort wurde etwas ausgesagt von einer Fläche oder einer Strecke, hier wird etwas ausgesagt von dem Verhältnis von Strecken. Nun aber genügt es zur Kenntnis und Messung der Fläche nicht, zu wissen, sie sei eine Mediale; ebenso genügt es zur Ausmessung der Strecke nicht, zu wissen, sie sei eine Apotome einer andern. Denn es gibt viele Strecken dieser Art. Eine Beschreibung ergibt sich aus diesen allgemeinen Merkmalen nicht. Die fest bestimmte Größe der Fläche oder der Strecke läßt sich hieraus nicht ermitteln. Jene Eigenschaften ergeben sich vielmehr hintendrein, nachdem die Größen konstruiert und beschrieben sind. Ebenso genügt es auch hier nicht zu wissen, was der Fall sein wird, wenn einmal die sieben stetigen Proportionalen gebildet sind nach einem Verhältnis, das ich noch gar nicht kenne. Nein, da mir dieses Verhältnis nicht durch irgendeine geometrische Konstruktion gegeben ist, so warte ich darauf, daß mir zunächst jemand zeigt, wie ich es herstellen kann. So war es ja auch bei allen früheren Figuren das erste, daß man sie beschrieb, in einen Kreis einbeschrieb, eine gewisse Größe bestimmte und zur Ausführung dieser Bestimmung eine gewisse geometrische Konstruktion anwandte. Erst hintendrein ergab sich dann die Kenntnis jener Eigenschaften, die zu einer gegenseitigen Vergleichung der Figuren dienten.

Um den beiderseitigen Unterschied noch klarer zu machen, wollen wir die Fünfeckseite betrachten. Beim Beschreiben derselben gingen wir oben so vor: Aus der Summe des Quadrats über dem Halbmesser und des Quadrats

über der Hälfte von diesem bildete man ein Quadrat. Von der Seite dieses Quadrats zog man die Hälfte des Halbmessers ab. Das Quadrat über der Reststrecke wurde mit dem Quadrat über dem Halbmesser wiederum zu einem Quadrat vereinigt. Die Seite dieses Quadrats war dann die Fünfeckseite. All das konnte man ausführen, und zwar ist die Ausführung leichter als die Darstellung mit Worten, wie jeder weiß, der mit dem Zirkel umgehen kann. Denn was gibt es Leichteres, als daß man den rechten Winkel GAM bildet, auf seinen Schenkeln die beliebige Strecke AM und das Doppelte davon AG abträgt, das eine Ende des Zirkels in M, das andere in G einsetzt, den Kreis GP beschreibt, MA bis P verlängert und schließlich GP in den Zirkel nimmt und in einen anderen Kreis mit Halbmesser GA einträgt?



Aber nun sehe man, was uns Bürgis Coss über die Fünfeckseite zu sagen weiß. Nach der oben angeführten Methode ergibt sich, daß die Zahl 5 *j* — 5 *iij* † + 1 *v* gleich ist der Sehne Null. D. h. wenn man der Reihe nach 5 stetige Proportionalen konstruiert, von denen die erste die Fünfeckseite sei, während das Verhältnis je gleich dem der Fünfeckseite zum Halbmesser ist, dann sind 5 erste Proportionalen zusammen mit einer fünften gleich 5 dritten.

Wie beim Siebeneck lehrt also Bürgi nicht, wie man die stetige Proportion herstellt, in der dies der Fall ist, noch drückt er die Länge der Proportionalen durch zuvor bekannte Größen aus. Vielmehr zeigt er nur, welche Eigenschaft auftritt, wenn einmal die Proportion gebildet ist. Man sagt mir also, ich soll die Eigenschaft zur Darstellung bringen, dann werde ich auch die Proportion haben. Aber wie soll ich denn die Eigenschaft zur Darstellung bringen, durch welche geometrische Konstruktion? Durch keine andere, so werde ich belehrt, kann dies geschehen, als wenn man die Proportion hernimmt, die ich suche. Man begeht also eine Petitio principii, und der arme Rechner, von allen Hilfsmitteln verlassen, hängt in dem Zahlengestrüpp und schaut umsonst nach seiner Coss aus. Das ist der eine Unterschied zwischen dem cossischen und dem geometrischen Verfahren.

Ein weiterer besteht darin, daß sich das ganze Verfahren von Bürgi auf das Wesen der diskreten Quantitäten oder der Zahlen stützt. Er teilt den Durchmesser in so viele Teile, als ihm gerade beliebt, im allgemeinen in zwei. Auf diese Zahl stützt sich der ganze Prozeß; er würde sich ändern, wenn man dem Durchmesser einen anderen Namen geben, d. h. eine andere Zahl zuordnen würde. Nicht so die Geometrie der Figuren, wie sie oben dargestellt wurde. Hier werden die in Länge aussprechbaren Seiten ohne Zahlen bezeichnet; die unaussprechbaren aber werden keineswegs durch Zahlen erfaßt. Man drückt sie vielmehr je nach ihrer Art so aus, daß es ganz klar ist, daß es sich hierbei nicht um diskrete, sondern um kontinuierliche Größen, also um Strecken und Flächen, handelt.

Drittens gehörte bisher zu einer Vieleckseite und zu der Seite des gleichnamigen Sterns je eine ganz bestimmte Beschreibung. Bei der algebraischen Analysis ist es nun höchst merkwürdig (der Geometer fühlt sich freilich hierdurch in erster Linie abgestoßen), daß das, was verlangt wird, nicht auf einem einzigen Weg erreicht werden kann. Freilich liegt auch hier eine gewisse Gesetzmäßigkeit vor. Denn wie bereits oben gesagt wurde, gibt es so viele Zahlen, die das Verlangte leisten, als es in der Figur der Länge nach verschiedene Sehnen oder Diagonalen gibt, im Fünfeck 2, im Siebeneck 3; eine Zahl für die Seite, die anderen für die Diagonalen. Eine Aussage, die über das der Figur eigentümliche Ver-

hältnis gemacht wird, gilt also gleicherweise für die Verhältnisse aller jener Strecken zum Durchmesser.

Viertens: vorausgesetzt auch, daß ein einziges Verhältnis das Verlangte leistet, so erfährt man doch nicht, wie man dieses genau erhält, sondern nur, wie man ihm von ferne näher kommt. Denn während die Strecken ihrer Art nach hinsichtlich der Wißbarkeit zu den unaussprechbaren gehören (d. h. zu den nicht zählbaren, die die Zahlen verschmähen) und daher die Rechnung durch keine noch soweit gehende Fortsetzung zu Ende geführt wird, ohne daß nicht immer etwas im ungewissen bleibt, kennt doch diese Rechnung, wie oben an zweiter Stelle gesagt wurde, außer den Zahlen keine anderen Hilfsmittel. Man teilt vielmehr den Durchmesser auf verschiedene Weise in tausend und aber tausend Teile, um die Rechnung immer genauer zu machen. Allein dabei wird das Ergebnis doch niemals völlig genau. Kurz, das heißt nicht die Sache selber wissen, sondern etwas, das ihr sehr nahe kommt, aber doch größer oder kleiner ist. Immer kann ein späterer Rechner die Annäherung noch weiter treiben; an das Ziel selber zu gelangen ist aber keinem möglich. Von dieser Art ist freilich alles, was rein nur in der Potenz der quantitativen Materie liegt und keine wißbare Formation besitzt, durch die es einmal in den Akt menschlicher Wißbarkeit gerückt wird.

Fünftens. Wir wollen einmal im besonderen vom Siebeneck und den zugehörigen gleichartigen Figuren reden. Bei diesen wächst der Reihe nach die Zahl der Proportionalen mit der Zahl der Seiten. Wenn man nun jeweils die letzte Proportionale kennen würde, im Siebeneck z. B. die siebente, so könnte man damit doch nicht die zwischenliegenden konstruieren. Denn wenn zwei Größen nicht selber Glieder einer fortlaufenden Proportion sind, so daß die eine z. B. die 3. oder 5. Potenz der anderen ist, so kann man zwischen ihnen nicht beliebig viele Glieder einer fortlaufenden Proportion auf geometrischem Wege einschieben, sondern nur 1 oder 3 oder 7 oder 15 usw.; dagegen ist es unmöglich, in der Ebene 2 oder 4, 5, 6, 8, 9 usw. zu konstruieren, und doch ist hier von ebenen Figuren die Rede. †

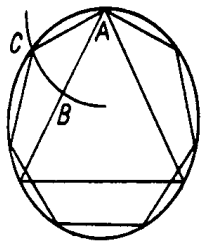
Nun liegen bei der Siebenecksproportion zwischen dem Halbmesser 1 und der 7. Proportionalen 1 *vij* sechs mittlere Proportionalen. Es verhalten sich aber 1 und 1 *vij* nicht wie 2 Zahlen einer entsprechend langen fortlaufenden Proportion. Denn das Verhältnis des Halbmessers zur Siebeneckseite kann nicht durch 2 Zahlen ausgedrückt werden, es ist ja nicht aussprechbar. Wäre es aussprechbar, so würde es zu den früher dargelegten Arten gehören, die frühere Klassen kennzeichnen, und die 7 Ecken wären nicht 7, sondern 3 oder 4, was ein Widerspruch ist. Denn das Verhältnis der Seiten rührte bei den primären Figuren von den Ecken her. Es müßten also durch einen einzigen Akt alle 6 mittleren Proportionalen zwischen 1 und 1 *vij* konstruiert werden. Wenn wiederum 1 *vj* der Größe nach gegeben wäre, so würden zwischen 1 und 1 *vj* fünf mittlere Proportionalen liegen. Wenn sich nun 1 und 1 *vj* wie zwei Kubikzahlen verhielten, so könnte man zuerst durch einen einzigen Akt 1 *ij* und 1 *iiij*, sodann zwischen 1, 1 *ij*, 1 *iiij*, 1 *vj* durch 3 Akte die drei mittleren Proportionalen konstruieren. Wenn aber 1 *v* der Größe nach gegeben wäre, so müßte man wiederum alle vier zwischenliegenden Proportionalen durch einen einzigen Akt konstruieren, was nicht möglich wäre außer im Fall einer aussprechbaren Proportion, wie oben. Das übrige versteht sich hiernach von selbst.

Wir ziehen also den Schluß: Jene cossischen Analysen haben mit unserer gegenwärtigen Betrachtung nichts zu tun; sie begründen nicht irgendeinen Grad

der Wißbarkeit, der vergleichbar wäre mit denen, die wir im früheren entwikkelt haben.

Nebenbei möchte ich bei Gelegenheit dieser Coss den Metaphysikern einen Hinweis geben. Sie sollen überlegen, ob sie hieraus etwas entnehmen können zur Erläuterung jenes bekannten Axioms: Von einem Nicht-Ding gibt es, wie man sagt, keine Beschaffenheiten, keine Eigenschaften. Denn im vorliegenden Fall beschäftigen wir uns mit Gedankendingen und sagen ganz richtig, daß die Siebeneckseite zu den Nicht-Dingen, d. h. Nicht-Gedankendingen, gehöre. Denn da ihre formale Beschreibung unmöglich ist, kann sie weder vom menschlichen Geist gewußt werden (denn die Möglichkeit der Beschreibung geht der Möglichkeit der Wißbarkeit voraus), noch auch wird sie in einem einfachen ewigen Akt von dem allwissenden Geist gewußt, weil sie ihrer Natur nach zu dem Unwißbaren gehört. Und doch gibt es von diesem Nicht-Gedankending gewisse wißbare Eigenschaften, die selber gewissermaßen bedingte Dinge sind. Angenommen nämlich, ein Siebeneck wäre in einen Kreis einbeschrieben, so hätte sein Seitenverhältnis die obengenannten Eigenschaften. Dieser Hinweis mag genügen*).

Es gibt noch andere falsche Sätze von Geometern über die Seiten von Figuren der genannten Arten. Allein dieselben werden schon durch ein mit größerer Geschicklichkeit ausgeführtes mechanisches Verfahren widerlegt, obwohl man sie gerade wegen des mechanischen Verfahrens der Jugend mitteilt. So wenn Albrecht Dürer die Seite AC des Siebenecks gleich der Hälfte AB des Dreiecks im gleichen Kreis setzt. Daß diese Strecke zu kurz ist, zeigt schon die mechanische Ausführung. Damit man jedoch nicht durch allzu rohes Hantieren hinters Licht geführt wird, kann man den Fehler vor dem praktischen Probieren durch folgende einfache Überlegung finden. Die Dreieckseite ist, wie aus der Zahl der Ecken bewiesen wird, in Potenz aussprechbar; das gleiche gilt daher auch für ihre Hälfte. Die Siebeneckseite ist aber nicht in Potenz aussprechbar, eben weil das Vieleck ein Siebeneck ist und weil es 7 Seiten und nicht 6 oder 5 oder 3 besitzt. Die Primzahlen erzeugen ja die Arten, allein diese Arten sind unter sich inkommensurabel und eine ist nicht gleich der andern.



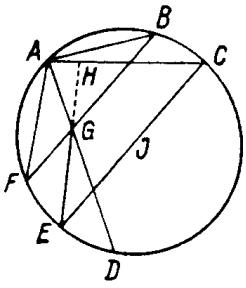
† Betreffs der verfehlten Ausführungen des Carolus Marianus Cremonensis und des Franciscus Flussates Candalla über das Siebeneck siehe Chr. Clavius, Geometria practica VIII, 30, und Kommentar zu Euklid IV, 16.

Dieser Problemkreis rief auch den hochedlen Herrn Markgrafen von Malaspina auf den Plan, der im Jahr 1614 Gesandter des durchlauchtigsten Herzogs von Parma am kaiserlichen Hof war. Er hat durch ein höchst geistreiches Diagramm alle früheren Konstruktionen übertroffen und geglaubt, die zu $^3/_{14}$ des Kreises gehörige Sehne sei gleich $^5/_4$ des Halbmessers und somit in Länge aus-

*) Um einer blasphemischen Deutung dieser Ausführungen zu entgehen, hielt es ein mir befreundeter ausgezeichneter Mathematiker für geraten, sie wegzulassen. Nun ist es aber ein durchaus geläufiger Satz der Theologen: was einen Widerspruch involviert, ist unmöglich. Auch lehren wir, daß das Wissen Gottes sich nicht auf derartige Unmöglichkeiten erstreckt, zumal da diese formalen Verhältnisse geometrischer Dinge nichts anderes sind als das Wesen Gottes selber. Denn was immer von Ewigkeit her in Gott ist, das macht das eine unteilbare göttliche Wesen aus. Er würde also sich selber als einen anderen erkennen, als er ist, wenn er das, was inkommensurabel ist, als kommensurabel erkennen würde. Warum sollte man daher scheinheilig nachgeben und wegen der Unerfahrenen, die das Buch doch nicht lesen, die anderen betrügen!

sprechbar. Der Beweisapparat war so raffiniert, daß selbst ein Euklid nicht herausfinden würde, welche Annahme dabei unbewiesen bleibt.

Für das Elfeck ist folgende Beschreibung verbreitet. In einem Kreis ziehe man von einem Punkt A aus nach der einen Seite des Umfangs die Quadratseite AC, nach der andern die Dreieckseite AD sowie nach beiden Seiten die Sechseckseiten AB und AF. Die zu dem Winkel FAB zwischen den beiden Sechseckseiten gehörige Sehne ist die Dreieckseite BF. Diese schneidet die vorige Dreieckseite AD in G. Man ziehe nun von dem Endpunkt C der Viereckseite aus durch den Mittelpunkt J den Durchmesser CE und vom andern Endpunkt E des Durchmessers aus durch den Schnittpunkt G der Dreieckseiten die Gerade EG, die die Viereckseite AC in H schneidet. Die Strecke GH zwischen diesen beiden Schnittpunkten soll nun die Elfeckseite sein. Sie ist jedoch, wie schon eine praktische Probe zeigt, zu lang. Allein ein erfahrener Mathematiker schaut auf die Art der Strecke, die notwendig, wenn auch in noch so fernem Grad, etwas gemein hat mit der Dreieck- und der Viereckseite. Nun aber führt die Zahl 11, die ja eine Primzahl ist, in keiner Weise zu diesen Figuren. Als Primzahl hat sie mit den Zahlen 3 und 4 nichts gemein. Der Mathematiker ist sich also sicher, daß die Beschreibung falsch ist, und kann sich gern die Rechenarbeit ersparen.



Es bleibt daher allen Einwänden und allen vergeblichen Versuchen gegenüber bestehen, daß die Seiten derartiger Figuren ihrer Natur nach unbekannt und unwißbar sind. Es ist also nicht verwunderlich, wenn das, was sich im Urbild der Welt nicht finden läßt, auch nicht in der Bildung der Teile der Welt ausgedrückt ist.

XLVI. SATZ.

Der Teilung eines Kreisbogens in 3, 5, 7 usw. gleiche Teile oder in einem Verhältnis, das nicht durch fortgesetzte Verdopplung der früher bewiesenen Teilungen entsteht, kommt keine geometrische Möglichkeit von der Art zu, daß sie eine Wißbarkeit erzeugen würde.

Die Teilung eines Bogens in 2, 4, 8 usw. Teile durch fortgesetzte Halbierung ist sicherlich geometrisch und wurde bereits im seitherigen angewandt. In 3 Teile läßt sich zerlegen der ganze Kreis durch das einbeschriebene Dreieck, der Halbkreis durch das Sechseck, der Viertelskreis durch das Zwölfeck, der Fünftelskreis durch das Fünfzehneck, der Bogen von 135° durch das Achteck, der Bogen von 108° durch das Zehneck. In ähnlicher Weise läßt sich in 5 Teile zerlegen der ganze Kreis durch das Fünfeck, der Halbkreis durch das Zehneck, der Drittelskreis durch das Fünfzehneck, der Bogen von 150° durch das Zwölfeck. Das Entsprechende gilt von den Bögen, die man erhält, wenn man jene Bögen in 2, 4, allgemein in eine solche Anzahl von Teilen zerlegt, die eine Potenz von 2 ist. Dies ist aber nicht der Fall wegen des Sinnes der Drei- und Fünfteilung, sondern zufällig, wegen der anderen Eigenschaften der Figuren, von denen bisher die Rede war.

Daß eine beliebige Dreiteilung oder eine Teilung nach irgendeinem beliebig gegebenen Verhältnis, das nicht durch eine Potenz von 2 ausgedrückt wird, unmöglich ist, erhellt aus der Vergleichung mit der Zweiteilung, die möglich ist. Bei dieser ist das Mittel, um den Bogen und den Winkel, für den jener das Maß ist, zu halbieren, eine gerade Linie, nämlich die Sehne des Bogens, die geometrisch

in 2 gleiche Teile zerlegt werden kann, da aus der Gleichheit dieser Teile die Gleichheit der Teile des entsprechenden Bogens folgt, mag dieser im Vergleich zum Kreis klein oder groß sein. Auf diesem Grund beruht auch die Tatsache, daß man im Dreieck aus der Gleichheit der Seiten auf die Gleichheit der gegenüberliegenden Winkel schließen kann. Dieses Mittel läßt uns aber bei den übrigen Teilungen im Stich. Man kann wohl zwar die Gerade, die Sehne des Bogens, geometrisch in beliebig viele Teile zerlegen; allein es folgt aus irgendeinem Verhältnis der Sehnenteile (abgesehen von dem der Gleichheit) nicht das Verhältnis der Bogenteile, wie man ja auch im Dreieck von dem Verhältnis der Seiten (abgesehen allein von dem der Gleichheit) nicht auf ein entsprechendes Verhältnis der gegenüberliegenden Winkel schließen kann. Teilt man z. B. die Sehne des Bogens in 3 gleiche Teile, so ist, wenn die Schnittlinien senkrecht auf der Sehne stehen, der mittlere Teil des Bogens kleiner als die seitlichen. Wenn dagegen die Schnittlinien von dem Kreismittelpunkt aus gezogen werden, dann ist der mittlere Bogenteil größer als die seitlichen. Also wird es zwischen dem unendlichen Abstand und dem Kreismittelpunkt einen Punkt geben von der Art, daß, wenn man von ihm aus zwei Schnittlinien zieht, sowohl die Sehne als auch der Bogen in 3 gleiche Teile zerlegt werden. Dieser Punkt ist aber um so weiter vom Kreismittelpunkt entfernt, je kleiner der in 3 Teile zu zerlegende Kreisbogen ist, jedoch nicht in einem festen Verhältnis. Da nun der Kreisbogen ins Unendliche verkleinert werden kann, rückt auch der Abstand jenes Punktes ins Unend-
† liche. Vom Unendlichen aber, oder von der unendlichen Verschiedenheit gibt es kein Wissen. Eine solche Schwierigkeit tritt bei der Dreiteilung auf, die noch verhältnismäßig einfach ist und der Gleichheit am nächsten steht. Eine viel größere Schwierigkeit entsteht bei den weiteren Teilungen eines Bogens, z. B. in 5, 7, 9, 11 usw. gleiche Teile. Hier gibt es keinen einzelnen Punkt mehr von der Art, daß die von ihm aus gezogenen Geraden, die die Sehne in die vorgeschriebene Anzahl gleicher Teile zerlegen, auch den Bogen in gleiche Teile teilen.

Die Mittel, die man zur Ausführung einer beliebigen Teilung beibringen und aus der Zahl, die die Teilung benennt, hernehmen kann, müssen allgemein und allen Bögen gemeinsam sein, mögen diese groß oder klein sein, sich viel oder wenig in ihrer Größe von ihren Sehnen unterscheiden. Sich nun aber damit begnügen, ein vages Verhältnis der Sehnenteile zu den Bogenteilen anzugeben, das heißt nicht die Aufgabe wissenschaftlich abgrenzen. Dies sei im besonderen gesagt von der analytischen Drei- und Fünfteilung Bürgis, von der wir beim vorausgehenden Satz ausführlich gesprochen haben. Wenn nun alles dort Gesagte auch hier gilt, so ist doch manches darunter, was für den vorliegenden Fall ganz besonders gilt und was bei der Teilung der Bögen klarer und verwunderlicher herauskommt als bei der Teilung des ganzen Kreises. Ich will die den beiden Fällen gemeinsamen Einwände übergehen: Daß man eine Petitio principii begeht, wenn man fordert, das zu machen, von dem man gerade wissen will, wie es zu machen ist. Daß die Eigenschaften einer stetigen Größe im Hinblick auf ihre Wißbarkeit nicht durch diskrete Größen oder Zahlen erfaßt werden. Daß man aus jeder Zahl, die man für die den vorgeschriebenen Bogenteil bestimmende Seite ausmittelt, nur entnehmen kann, daß die Seite größer oder kleiner ist, als sie angibt; daß sich also jene analytische Bestimmung zu der geometrischen verhält wie die rohe und ungeordnete Materie zu etwas Formiertem, wie eine unbegrenzte und unbestimmte Größe zu einer Figur. Demgegenüber liegt im gegenwärtigen Fall eine Besonderheit vor, die in der halbmechanischen Coss als ausgezeichnete Leistung, in der wissen-

schaftlichen Geometrie dagegen als abwegige Entartung gilt: Da jede Sehne, die kleiner ist als der Durchmesser, zwei verschiedenen Kreisbögen zugehört, von denen der eine kleiner, der andere größer als ein Halbkreis ist, und daher die zu einem bestimmten Teil des kleineren Bogens gehörige Sehne kleiner, die zum gleichen Bruchteil des größeren gehörige Sehne dagegen größer wird, gibt jene analytische Methode Bürgis nicht nur für diese beiden ungleichen Sehnen, sondern auch noch für eine Anzahl anderer Sehnen des Kreises eine allgemeine Vorschrift, die dazu dient, alle jene Sehnen durch Zahlen näherungsweise auszudrücken. Bei der Dreiteilung z. B. besteht diese Vorschrift in folgendem. Es seien ein Bogen, sagen wir von 48°, und seine Sehne gegeben, und dieser Bogen soll in 3 Teile von je 16° zerlegt werden, d. h. man soll die Sehne eines solchen Teils oder ihr Verhältnis zur Sehne des ganzen Bogens von 48° finden. Nun schreibt man vor, man soll ein Verhältnis herstellen, so daß sich die Sehne des ganzen Bogens zur gesuchten Sehne des Bogenteils verhält wie diese zur zweiten Proportionalen und wie diese zweite Proportionale zur dritten. Nun muß man die Sehne des Bogenteils verdreifachen und davon die dritte Proportionale abziehen. Der Rest, der übrigbleibt, sagt man, ist gleich der Sehne des ganzen Bogens. D. h. man erhebe den dritten Teil der gegebenen Sehne in die 3. Potenz, wie einen Bruch; die Zahl, die herauskommt, addiere man zum Ganzen. Der dritte Teil von dieser Summe ist ein wenig kleiner als die gesuchte Sehne. Wenn man nun jenen Wert wiederum in die 3. Potenz erhebt und zum Ganzen addiert, so kommt der dritte Teil dieser Summe dem wahren Wert näher usw. in infinitum. Durch diesen Prozeß kommt man nach und nach an die Sehne von 16° heran. † Wenn man nun aber die Zahl, die in die 3. Potenz zu erheben ist, größer festsetzt, und zwar ungefähr so groß, als mit Hilfe des Zirkels für ein Drittel des Teils des Kreises herauskommt, der sich nach Abzug von 48° ergibt, also des Bogens von 312°, dessen Drittel gleich 104° ist, dann wird man auch die Sehne dieses Bogens von 104° und seiner Ergänzung von 256° auf dieselbe Weise erhalten. Aber nicht allein dies. Wenn man zu 48 und 312 einen ganzen Kreis von 360° hinzufügt, wird man auch für die Drittel der Summen von 408 und 672, d. h. für 136 und 224, die zugehörigen Sehnen durch den gleichen cossischen Ausdruck finden. Allgemein ist zu sagen: so viele Einheiten nach Abzug von 2 von der Teilzahl übrig bleiben, so oft darf man einen ganzen Kreis oder den gegebenen Bogen, der zu teilen ist, hinzufügen, um durch ein und denselben cossischen Ausdruck die Sehnen neuer Bögen aufzufinden. Daraus erhellt der ungeheure Unterschied zwischen diesen cossischen Ausdrücken und den wißbaren Graden, die ich im früheren entwickelt habe.

Läßt sich nun also nicht irgendeine andere kunstgerechtere Art und Weise angeben, um beliebige Teilungen der Bögen auszuführen? Ich antworte: Wenn alle Sehnen der Bögen, die zu teilen sind, unter einem gemeinsamen Begriff betrachtet werden und wenn wir nur jene Hilfsmittel zur Verfügung haben, die allen gesuchten Sehnen gemeinsam sind (wie ihre stetigen Proportionalen nach dem verlangten Verhältnis), dann wird schlechterdings niemand etwas Besseres ausfindig machen können, und jeder, der sich damit beschäftigt, macht sich vergebliche Mühe; er begeht in seiner Verwirrung eine contradictio in adjecto. Aus dem, was allen Fällen gemeinsam ist, läßt sich nichts für die Besonderheit des Einzelfalles schließen.

Wenn wir aber die Rede auf die spezifischen Unterschiede der Strecken, die Sehnen der zu teilenden Bögen sind, bringen, so ändert sich der Stand der Frage

und an Stelle der Teilung eines beliebigen Bogens setzen wir die Teilung des ganzen Kreises durch eine regelmäßige Figur, die der vorgelegten Sehne ihre spezifische Eigenschaft verleiht. Von diesen regelmäßigen Figuren haben wir aber bereits oben gehandelt und werden im folgenden noch mehr sagen. Wir haben ja gerade bei diesen Untersuchungen Mittel ausfindig gemacht, mit deren Hilfe man einige dieser Figuren beschreiben konnte. Da also ein solches Mittel der Natur nach früher sein muß als die Sache, die durch dieses Mittel herzustellen ist, so würde man schlechterdings eine Petitio principii begehen, wenn wir zur Beschaffung unseres Mittels Hilfe suchen würden bei den regelmäßigen Figuren.

Nun aber könnte hier ein Gegner einwenden, daß der Alexandriner Pappus im 4. Buch seiner mathematischen Collectionen, Satz 31, die Dreiteilung des Winkels mit Hilfe einer Hyperbel lehrt und im Satz 35 zeigt, wie man einen Winkel in beliebig gegebenem Verhältnis mit Hilfe der Quadratrix und der Helix teilt, und daß Clavius in seiner Geometria Practica VIII, 25 dasselbe mit Hilfe der † Konchoide des Nikomedes leistet.

Allein die Entdeckungen jener Gelehrten begründen keinerlei Möglichkeit einer beliebigen Teilung für die wissenschaftliche Geometrie. Um dies klarzumachen, will ich zuerst die Kunstgriffe des Pappus bei der Dreiteilung darlegen und dann den Unterschied zwischen diesen und einer wißbaren Beschreibung ins Licht rücken.

Zunächst teilt Pappus in der Vorrede zu Satz 31 die Probleme (die er in einem allgemeineren Sinn des Wortes geometrische nennt, während für uns „geometrisch" einen speziellen Sinn hat) in ebene, räumliche und lineare und gesteht, daß die Dreiteilung mit Hilfe ebener Konstruktionen (die für mich im speziellen Sinn geometrisch heißen, weil sie wißbar nach den dargelegten Graden sind) nicht ausführbar ist; er überführte aus diesem Grund die alten Geometer, die sich vergeblich damit abgemüht haben, des Mangels an Überlegtheit. Er selber führt seine Dreiteilung mit Hilfe einer räumlichen Konstruktion, die beliebige Teilung aber mit Hilfe von figurierten Linien aus.

Das Verfahren bei der Dreiteilung ist folgendes. Es sei ein Winkel gegeben, der in 3 Teile zu zerlegen ist. Man fälle von einem Punkt des einen Schenkels aus das Lot auf den andern Schenkel, durch das die Länge der Schenkel begrenzt gedacht werde. Nun ziehe man zu dem zweiten kürzeren Schenkel durch jenen Punkt und zu dem Lot durch die Spitze des gegebenen Winkels Parallelen, die miteinander ebenfalls einen rechten Winkel bilden. Nun nimmt Pappus einen Kegel, also eine räumliche Figur, an, dessen Oberfläche durch den Fußpunkt des Lotes geht. Den so gelagerten Kegel dreht oder neigt er nun soweit, bis er mit seiner Oberfläche in der Ebene als Schnitt eine sog. Hyperbel bildet, deren Asymptoten die beiden Parallelen sind. Hierauf beschreibt er um den Fußpunkt des Lotes mit einer Strecke, die doppelt so groß ist wie der erste Schenkel, in der Ebene einen Bogen, der den Kegelschnitt schneidet. Nun verbindet er den Fußpunkt des Lotes mit diesem Schnittpunkt und zieht † durch die Spitze des gegebenen Winkels eine Parallele. Danach beweist er, daß durch diese Parallele von dem Winkel ein Drittel abgeschnitten wird.

Bei Pappus wird also dieses Problem zu einem räumlichen durch Verwendung eines Kegels, einer räumlichen Figur. Allein insofern man zwischen den gegebenen Asymptoten, den beiden aufeinander senkrecht stehenden Parallelen, durch einen gegebenen Punkt zwischen ihnen den Kegelschnitt, den man Hyperbel nennt, auch ohne Kegel in der Ebene zeichnen kann, ist diese Aufgabe offenbar

auch zu den linearen zu rechnen. Eine solche Linie wird ja erzeugt durch eine geometrische Bewegung und eine stetige Änderung von Strecken, d. h. sie wird dargestellt durch beliebig viele Punkte ganz ebenso wie die Quadratrix und die Helix, mit deren Hilfe Pappus in Satz 35 sowohl die Dreiteilung als auch eine beliebige Teilung ausführt. Das also sind seine Kunstgriffe.

Was sollen wir nun sagen? Ich frage: Kann man zwischen den gegebenen Asymptoten durch einen gegebenen Punkt nur eine Hyperbel beschreiben, gleichviel ob durch die Neigung des Kegels oder durch eine Reihe unendlich vieler Punkte? Gibt es auf der einen Seite nur einen Schnittpunkt des Kreises mit der Hyperbel? Gibt es nur eine eindeutig bestimmte Neigung der Verbindungslinie der Hyperbelpunkte zu der Achse der Figur?

Ich gestehe, daß dies alles notwendig und sicher ist, wenn einmal die Hyperbel gezeichnet vorliegt. Es besaß ja auch früher bei der analytischen Dreiteilung Bürgis die Sehne des Bogendrittels, wenn sie einmal konstruiert war, eine bestimmte, notwendige Länge oder ein solches Verhältnis zur Sehne des ganzen Bogens. Allein da wir nicht danach fragen, was der Fall ist, wenn die Sache bereits ausgeführt ist, sondern danach, wie die noch nicht ausgeführte Sache erst auszuführen ist, damit etwas da ist, so erhalten wir aus den räumlichen und linearen Problemen der Alten keinen weiteren Beitrag zur gesuchten Kenntnis unserer Strecken als oben aus der analytischen Lehre der Modernen. Es gibt freilich zwischen den gegebenen Asymptoten durch einen gegebenen Punkt nur eine einzige Hyperbel in der Ebene der Asymptoten. Nun aber verlangt man von mir, ich soll, während die Hyperbel noch nicht gezogen ist, den Kegel solange um den Punkt, in dem er festhängt, drehen, bis sie fertig da ist. Oder man verlangt von mir, ohne Kegel, ich soll die Linien, durch die man die Hyperbel als Punktreihe erhält, solange verändern, bis die Hyperbel hinlänglich verlängert ist, und ich soll mir die Teile, die zwischen den konstruierten Punkten liegen, konstruiert vorstellen. In beiden Fällen verlangt man von mir, ich soll das, was der Potenz nach von unendlicher Mannigfaltigkeit ist, durch einen einzigen Akt oder eine einzige Bewegung durchlaufen, um hiebei auch das zu erreichen, was in jener potentiellen Unendlichkeit verborgen ist, ohne das Licht vollkommener Erkenntnis, wie es den von den Alten als ebene bezeichneten Problemen eignet.

Von derartigen Postulaten machen der Franzose Franciscus Vieta und die heutigen belgischen Mathematiker häufig Gebrauch bei der Lösung der Probleme, † die ihrer Natur nach nicht lösbar sind, außer auf eine nicht kunstgerechte Weise durch Zahlen oder mit Hilfe von geometrischen Bewegungen, die durch eine gewisse unendliche Anzahl von Größenänderungen gesteuert werden.

Wenn einmal alles zutage liegen wird, was sie glauben ausführen zu können, um dem Verstand Sicherheit zu geben, so werden wir die Bestimmung von etwas in der Hand haben, was ein wenig größer oder kleiner als das Gesuchte ist und diesem immer näher kommt, wie wir dies auch oben bei der analytischen Dreiteilung festgestellt haben.

Daß das, was ich über dieses räumliche Problem der Dreiteilung sage, wahr ist, läßt auch schon das Wort räumlich erkennen. Denn wenn das Verhältnis räumlicher Gebilde nicht gleich ist dem Verhältnis zweier Kubikzahlen, kann man ein gegebenes räumliches Gebilde nicht durch ein anderes räumliches Gebilde so messen, daß der Verstand ein Wissen gewänne, da die zwei zwischenliegenden Proportionalen in der Ebene exakt nicht konstruiert werden können. Diese können zwar in den Würfeln stecken; allein von den ebenen Gebilden gibt

es keinen Übergang zur Herstellung von Würfeln ohne die beiden mittleren Proportionalen; es ist gleichsam die Brücke abgebrochen. Um die beiden mittleren Proportionalen zu finden, verwenden manche Mathematiker eine geometrische Bewegung, indem sie etwas vorschreiben, was hinsichtlich der Bestimmtheit eines adäquaten geometrischen Akts unausführbar ist. Auch Pappus verwendet hier bei Kegelschnitte, die mit Hilfe der beiden Proportionalen ermittelt werden, da
† auch der Kegel ein räumliches Gebilde ist. So begeht man immer eine Petitio principii, und die Brücke liegt auf dem jenseitigen Ufer.

XLVII. SATZ.

Die Figuren mit ungerader Seitenzahl größer als 5 (ausgenommen das Fünfzehneck) samt ihren Diagonalen, sowie ihre ganzen Klassen sind ebenso zu werten wie das Siebeneck und die übrigen Figuren, deren Seitenzahl eine Primzahl ist.

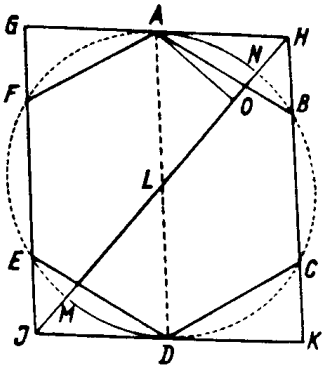
Denn wenn die Seitenzahl ungerade und keine Primzahl ist, so ist sie entweder das kleinste Vielfache von zwei ungeraden Primzahlen oder das Quadrat einer Primzahl oder das Produkt von einer Primzahl und dem Quadrat einer anderen solchen oder das Produkt von Vielfachen und Quadraten, wobei diese beiden Gruppen einzeln oder vereint auftreten können.

Wären nun diese Figuren beschreibbar, einbeschreibbar oder wißbar, dann gäbe es für sie entweder eine eigentliche Darstellung aus den Ecken oder eine uneigentliche aus den Beziehungen zu den Figuren, an denen sie teilhaben. Eine eigentliche Darstellung gibt es nun aber nicht, da die Zahl der Seiten nicht eine solche Primzahl ist, aus der sich eine Darstellung bilden ließe. Eine uneigentliche Darstellung gibt es weder für die Vielecke der ersten Gruppe, z. B. das 21-Eck, da die Figuren, die an ihnen teilhaben, entweder beide oder eine von ihnen, wie hier das Siebeneck (das auf das Dreieck und Fünfeck folgt, aus denen das 15-Eck gebildet wird), nach dem vorausgehenden Satz 45 keine eigentliche Darstellung zulassen; noch für die Vielecke der zweiten Gruppe, z. B. das Neuneck, da man nach dem vorausgehenden Satz 46 einen bestimmten Bruchteil eines Kreises, hier ein Drittel, nicht wieder in die entsprechende gleiche Anzahl gleicher Teile zerlegen kann; noch für die Vielecke der dritten und vierten Gruppe, da die vorausgehenden Vielecke, die an ihnen teilhaben, nicht darstellbar sind.

Über das Neuneck, dessen Neunzahl das Quadrat der ersten ungeraden Primzahl drei ist, haben die Mathematiker seither gestritten. Verschiedene haben sich Mühe gegeben, auch die Seite dieser Figur darzustellen, alle aber umsonst. Sie hätten dieses Problem nie in Angriff genommen, wenn sie auf den Unterschied zwischen Wißbarem und Unwißbarem geachtet hätten.

† Campanus wollte das Neuneck darstellen mit Hilfe der Dreiteilung des Winkels, die, wie in Satz 46 gezeigt wurde, unwißbar ist. Freilich läßt sich diese mit der Methode von Pappus und Clavius durchführen, indem man eine geometrische Bewegung annimmt. Allein was soll das bei ebenen Figuren, von denen wir hier doch handeln, wenn man räumliche Gebilde braucht, um die Linien, die man zur Dreiteilung benutzt, herzustellen, die Hyperbel, die Quadratrix, die Helix und die Konchoide? Campanus bemerkte bei dem Versuch der Dreiteilung nicht, daß er den dritten Teil des Winkels als sicher annahm, während er doch erst gesucht war. In meinem Exemplar seines Euklidkommentars findet sich hinten S. 586 eine Stelle, die sich auf den Schluß des 4. Buches bezieht.

Giordano Bruno aus Nola verlängert in dem Sechseck $ABCDEF$ die gegenüberliegenden Seiten BC und EF nach oben und unten und zieht die Lote GH und JK, die den Kreis in A und D berühren. In dem Rechteck, das so entsteht, zieht er die Diagonale JH und glaubt nun, der Kreis werde durch diese so geschnitten, daß die Bögen AN und DM zwischen den Berührungspunkten A, D und den Schnittpunkten N, M je ein Neuntel des Kreises ausmachen. Nun aber läßt sich aus der Figur folgendes beweisen. Das Quadrat der halben Diagonale LH ist aussprechbar, es ist nämlich $^7/_{16}$ vom Quadrat des Durchmessers. Denn der Winkel ABH beträgt 60°, daher ist BH die Hälfte von AB oder AL und das Quadrat von BH ist $^1/_4$ des Quadrats von AL, also das Quadrat von AH gleich $^3/_4$ des Quadrats von AL. Das Quadrat von LH aber ist gleich der Summe der Quadrate von LA und AH. Danach müßte also der Sinus von 40°, d. h. die halbe Sehne, die zu $^2/_9$ des Kreises gehört, in Potenz aussprechbar sein; diese halbe Sehne wäre nämlich gleich $^3/_{28}$ vom Quadrat des Durchmessers. Denn fällt man von A auf LH das Lot AO, so gilt die Beziehung: wie sich das Quadrat $^7/_{16}$ von LH zum Quadrat $^3/_{16}$ von HA verhält, so verhält sich das Quadrat $^4/_{16}$ von LA zum Quadrat von AO; dieses letztere ist also $^{12}/_7$ von $^1/_{16}$, d. i. $^3/_{28}$. Damit wäre also die Neuneckseite dem Rang nach höher als manche der im vorausgehenden behandelten Vieleckseiten; es müßte etwas mit diesen gemeinsam haben, wo doch die Zahl der Seiten ungerade ist, das Quadrat der Primzahl 3, und wo das Neuneck aus dem Viereck und Dreieck, denen jener Ranggrad zukommt, durch Halbierung der Bögen in diesen nicht hergestellt werden kann.



XLVIII. ZUSATZ.

Aus alledem folgt, daß sich hinsichtlich des Begriffs, der Wißbarkeit, der Bestimmung, der Beschreibung und der Darstellung die Grenzen innerhalb der ersten Ordnungen der Figuren halten. Es gibt also nicht mehr als 4 Klassen von wißbaren Figuren. Drei davon lassen eine eigentliche Darstellung zu. Familienhaupt in der ersten Klasse ist das Viereck, das auf den Kreisdurchmesser folgt, die Kennziffer ist hier 2. Familienhaupt in der zweiten Klasse ist das Dreieck, dessen Kennziffer 3 ist, in der dritten Klasse das Fünfeck, dessen Kennziffer 5 ist. Eine einzige Klasse gibt es mit uneigentlicher Darstellung; die Kennziffer ist das Produkt von 3 und 5, also 15; denn die erste Figur dieser Klasse ist das Fünfzehneck.

XLIX. SATZ.

Da die Zweiteilung (die ursprünglich der ersten Klasse eignet) auch in der zweiten und dritten auftritt, erhellt, daß die erste Klasse anderen Rechtes ist als die beiden anderen. Die erste ist verwandt mit jeder der beiden anderen, diese Figurationen aber sondern sich voneinander ab. Es bilden also die Figuren, die eigentliche Darstellungen besitzen, in gewisser Weise nur zwei Arten.

Denn das Viereck und das Achteck schließen sich sogleich gewissermaßen ganz und gar an die Dreiecksippe an, da $^1/_6$ und $^1/_{12}$ des Kreises zusammen $^1/_4$, $^1/_{12}$ und $^1/_{24}$ des Kreises zusammen $^1/_8$ ausmachen. Das Viereck ordnet sich auch in gewisser Hinsicht der Fünfecksippe ein, da $^1/_5$ und $^1/_{20}$ des Kreises zusammen

$^1/_4$ ausmachen. Der Grund hierfür ist darin zu suchen, daß sich die Zahlen 3 und 5 in Zahlen zerlegen lassen, die Potenzen von 2 sind; denn die Teile von 3 sind 1 und 2, die von 5 sind 1 und 4. Eine solche Beziehung besteht nicht zwischen der Dreier- und der Fünferklasse. Denn es machen zwar $^1/_6$ und $^1/_{30}$ des Kreises zusammen $^1/_5$ aus, allein $^1/_{30}$ gehört der Fünfzehnerklasse an, die keine eigentliche Darstellung besitzt. In gleicher Weise machen $^1/_{10}$ und $^1/_{15}$ (hier spielt wieder die vierte Klasse herein) zusammen $^1/_6$ aus. Wegen dieser Dualität der Arten ist die charakteristische Zahl bei der ersten Art 12, bei der zweiten 20 oder die Hälfte davon 10. Das werden wir unten im 3. Buch wieder brauchen und bei der Unterscheidung der Tongeschlechter benutzen.

L. VERGLEICHUNG DER FIGUREN ODER KREISTEILUNGEN.

Den ersten Platz nimmt der Durchmesser ein, denn er ist in Länge aussprechbar. An zweiter Stelle kommt die Seite des Sechsecks, die gleich dem Halbmesser und daher ebenfalls in Länge aussprechbar ist. An dritter Stelle stehen das Viereck und das Dreieck, da sie Seiten haben, die nur in Potenz aussprechbar sind. Den vierten Platz nehmen ein die Seiten des Zwölfecks, des Zehnecks und der zugehörigen Sternfiguren; denn sie sind in Potenz nicht aussprechbar und zusammengesetzte Größen erster Art, nämlich Binomiale und Apotome, die Zwölfeckseite eine erste, die Zehneckseite eine vierte. An fünfter Stelle folgen die Seiten des Fünfecks und der zugehörigen Sternfigur, die Seiten des Achtecks und seiner Sternfigur; denn sie gehören zu der vierten Art zusammengesetzter Größen, die Major und Minor heißen.

Damit nun nicht etwa die gute Note des Zehnecks dem Fünfeck präjudiziert, oder daß nicht durch die Gleichheit der Art der Achteckseite diese Figur auf gleiche Stufe gestellt wird mit dem Fünfeck oder dem Zehneck, erhält das Fünfeck gleich bei seiner Erzeugung einen neuen Vorzug, insofern bei dieser Sippe, die durch die Zehnzahl gekennzeichnet ist, überall der göttliche Schnitt herrscht. In den Seiten des Fünfecks und seiner Sternfigur ist er unmittelbar enthalten; den Seiten des Zehnecks und seiner Sternfigur kommt er nur durch Vermittlung der Sechseckseite zu; beim Achteck tritt er in keiner Weise auf.

Abgesehen von den genannten Eigenschaften der Seiten läßt sich der Rang auch abstufen, insofern sich die Figuren durch die Besonderheit und Vollkommenheit der Fläche, die sie umschließen, unterscheiden. Nach dem Durchmesser (dessen Flächeninhalt null ist und der, wie Ptolemäus erwähnt, nur die Kreisfläche, ebenso wie den Umfang in zwei gleiche Teile zerlegt) nehmen hier den ersten Platz ein das Viereck und das Zwölfeck, die einen aussprechbaren Flächeninhalt haben, das Viereck zumal dank seiner ausgezeichneten Sonderstellung, insofern seine Fläche gleich ist dem Quadrat der Seite, wie ja die Art des Flächeninhalts quadratisch ist; es umschließt die Hälfte des Quadrats über dem Durchmesser. Das Zwölfeck kommt gleich darauf, indem es $^3/_4$ vom Quadrat über dem Durchmesser umschließt. An nächster Stelle folgen das Dreieck, Sechseck und Achteck, deren Flächeninhalt durch eine Mediale ausgedrückt wird. Die Flächeninhalte des Fünfecks und Zehnecks besitzen noch keine begriffliche Bezeichnung.

Ende des ersten Buches.