Integralsubstitution elliptischer Integrale

von David Müßig und Mario Koddenbrock

Zu zeigen ist:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{((\frac{a+b}{2})^2+t^2)(\sqrt{ab}^2+t^2)}}$$

Dazu benutzen wir die Substitution:

$$u = \frac{1}{2}(t - \frac{ab}{t})$$

hieraus folgt t=0 $\Leftrightarrow u = -\infty \; und \; t = \infty \Leftrightarrow u = \infty$

es gilt:

$$du = \frac{1}{2}(1 + \frac{ab}{t^2})dt = \frac{1}{2}(\frac{t^2}{t^2} + \frac{ab}{t^2})dt = \frac{t^2+ab}{2t^2}dt$$

Außerdem brauchen wir später noch:

$$u^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(t - \frac{ab}{t}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(t^2 - 2ab + \frac{a^2b^2}{t^2}\right) + \left(\frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(t^2 + \frac{a^2b^2}{t^2} + a^2 + b^2\right) = \frac{t^4 + a^2b^2 + b^2t^2 + b^2t^2}{4t^2} = \frac{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}{4t^2}$$

und

$$u^2 + \sqrt{ab}^2 = \frac{1}{4}\left(t - \frac{ab}{t}\right)^2 + ab = \frac{t^2 - 2ab + \frac{a^2b^2}{t^2} + 4ab}{4} = \frac{t^4 + 2abt^2 + a^2b^2}{4t^2}$$

$$= \frac{(t^2+ab)^2}{4t^2}$$

Nun führen wir die Substitution durch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\frac{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}{4}}} = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{t^2+ab}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+ab}{2t^2}\sqrt{\frac{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}{4}}}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{t^2+ab}{2t^2}\,dt}{\sqrt{\frac{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}{4}\,\frac{(t^2+ab)^2}{4t^4}}} = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{t^2+ab}{2t^2}\,dt}{\sqrt{\frac{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}{4t^2}\,\frac{(t^2+ab)^2}{4t^2}}}$$

Wenn wir nun die vorherigen Ergebnisse einsetzen und die Grenzen an den Variablentausch anpassen erhalten wir also

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{((\frac{a+b}{2})^2+u^2)(\sqrt{ab}^2+u^2)}}$$