Entfernungen auf Loxodrome und Orthodrome

Entfernungsberechnung zweier Punkte auf der kürzesten Loxodrome

$$L = Latitude, \qquad \lambda = Longitude$$

$$Startpunkt\ A = (L_1, \lambda_1)$$

$$Zielpunkt\ B = (L_2, \lambda_2)$$

$$d\lambda = |\lambda_2 - \lambda_1| \quad und \quad dL = |L_2 - L_1|$$

$$\sigma(L) = \sec L \ \ ist\ der\ lokale\ Ausdehnungsfaktor\ der\ Latitude\ L$$

$$Länge\ des\ Äquator = 2 * \pi * R, \qquad dabei\ ist\ R \approx 6371\ km\ der\ Radius\ der\ Erde.$$

In der Riemannschen Geometrie ist das Differential der Bogenlänge ds integriert die Länge der Kurve.

Wir nehmen unendlich kleine Dreiecke an, deren Seiten Longituden und Latituden sind.

$$\left(\frac{ds}{R}\right)^2 = dL^2 + \left(\frac{d\lambda}{\sigma(L)}\right)^2$$

$$ds^2 = R^2 * \left(dL^2 + \frac{d\lambda^2}{\sigma^2(L)}\right)$$

$$\frac{ds^2}{dL^2} = R^2 * \left(1 + \frac{d\lambda^2}{\sigma^2(L) * dL^2}\right)$$

$$\frac{ds}{dL} = R * \sqrt{1 + \frac{d\lambda^2}{\sigma^2(L) * dL^2}}$$

$$\frac{ds}{dL} = R * \sqrt{1 + \frac{1}{\sigma^2(L)} * \left(\frac{d\lambda}{dL}\right)^2} \quad (a)$$

Die Länge der Loxodromen ist damit:

$$s = \int_{Start}^{Ende} ds$$

Unser Startpunkt ist A und unser Ziel ist B.

Wir setzen nun die entsprechenden Latituden als Grenzen:

$$= \int_{L_1}^{L_2} \frac{ds}{dL}\, dL$$

Setzen wir nun (a) ein:

$$R * \sqrt{1 + \frac{1}{\sigma^2(L)} * \left(\frac{d\lambda}{dL}\right)^2} * \int_{L_1}^{L_2} dL$$

Wir integrieren und erhalten damit für die Entfernung zwischen A und B

auf einer Loxodromen:

$$s = R * \sqrt{1 + \frac{1}{\sigma^2(L)} * \left(\frac{d\lambda}{dL}\right)^2} * (L_2 - L_1)$$

Zur besseren Veranschaulichung der Formel wollen wir im Folgendem

die Länge des Äquators berechnen. Diese ist ja bekanntlich $2 * \pi * R$.

Wir wollen uns nun einmal um die Erde auf dem Äquator bewegen. L_1 *ist unser Startpunkt und gleich* 0

und unser Ziel ist L_2*und hat den Wert* $2 * \pi$. *Da wir dabei uns nicht in*

$y -$ *Richtung bewegen, ist* $d\lambda = 0$.

Daraus ergibt sich Folgendes für die Länge des Äquators:

$$s = R * \sqrt{1 + \frac{1}{\sigma^2(L)} * \left(\frac{0}{2 * \pi}\right)^2} * (2 * \pi - 0)$$

$$= R * \sqrt{1 + 0} * (2 * \pi - 0)$$

$$= 2 * \pi * R$$

Und genau dies haben wir auch erwartet.

Basierend auf Quelle [1].

Entfernungsberechnung zweier Punkte auf der Orthodrome:

$$Die\ Haversine\ Formel\ berechnet\ die\ kürzeste\ Enfernung\ \ auf\ einer\ Orthodromen\ (Großkreis)$$

$$R = 6371, \qquad Mittlerer\ Erdradius$$

$$Startpunkt\ A = (lat_1, long_1)$$

$$Zielpunkt\ B = (lat_2, long_2)$$

Wir berechnen die Differenz der Breitengrade beider Orte: $\Delta lat = |lat_2 - \ lat_1|$

Und nun die Differenz der Längengrade beider Orte: $\Delta long = |long_2 - \ long_1|$

$$Die\ Haversine\ Formel\ ist\ folgendermaßen\ definiert:$$

$$haversin\left(\frac{d}{R}\right) = haversin(\Delta lat) + \ \cos lat_1 * \cos lat_2 * haversin(\Delta long)$$

$$Dabei\ ist\ haversin(\theta) = \sin^2\frac{\theta}{2}\ und\ wir\ rechnen\ erst\ einmal\ im\ Einheitskreis\ (R = 1), daher$$

$$\sin^2\frac{d}{2} = \sin^2\frac{\Delta lat}{2} + \cos lat_1 * \cos lat_2 * \sin^2\frac{\Delta long}{2}$$

$$\mathrm{a} = \sin^2\frac{d}{2} = \sin^2\frac{\Delta lat}{2} + \cos lat_1 * \cos lat_2 * \sin^2\frac{\Delta long}{2}$$

$$\sqrt{a} = \frac{1}{2} * \sin d = \sqrt{\sin^2\frac{\Delta lat}{2} + \cos lat_1 * \cos lat_2 * \sin^2\frac{\Delta long}{2}}$$

$$2 * \sqrt{a} = \sin d = 2 * \sqrt{\sin^2\frac{\Delta lat}{2} + \cos lat_1 * \cos lat_2 * \sin^2\frac{\Delta long}{2}}$$

$$Mit\ Hilfe\ des\ Arkustangens\ mit\ 2\ Argumenten (atan2)\ berechnen\ wir\ nun\ die\ Strecke$$

$$zwischen\ den\ 2\ Punkten\ im\ Einheitskreis.$$

$$c = 2 * atan2\left(\sqrt{a}, \sqrt{1-a}\right)$$

$$Um\ nun\ den\ Abstand\ der\ 2\ Punkte\ auf\ der\ Erdkugel\ zu\ erhalten,$$

$$müssen\ wir\ c\ noch\ mit\ dem\ \ Erdradius\ multiplizieren:$$

$$s = R * c$$

$$ist\ also\ der\ Abstand\ zwischen\ 2\ Punkten\ A\ und\ B\ auf\ der\ Orthodromen.$$

Basierend auf Quelle [2]

Eine weitere Möglichkeit die Entfernung zweier Punkte auf der kürzesten Loxodrome zu berechnen(Zusatz!):

$$Verhältnis\ der\ Y - Koordinaten\ der\ beiden\ Punkte\ A\ und\ B\ zueinander:$$

$$\Delta\varphi = \ln\left(\frac{\tan\frac{lat_2}{2} + \frac{\pi}{4}}{\tan\frac{lat_1}{2} + \frac{\pi}{4}}\right)$$

Wir berechnen die Differenz der Breitengrade beider Orte: $\Delta lat = |lat_2 - lat_1|$

Und nun die Differenz der Längengrade beider Orte: $\Delta long = |long_2 - long_1|$

$$q\ ist\ der\ Streckungsfaktor\ für\ die\ Longitude:$$

$$if\,(\,E{:}W\ line)\ q = \cos lat_1;\quad else\ q = \frac{\Delta lat}{\Delta\varphi};$$

$$s\ erhalten\ wir\ mittels\ des\ Satzes\ von\ Pythagoras, dabei\ strecken\ wir$$

$$aber\ die\ Longitude\ entsprechend\ mittels\ q. Des\ weiteren\ müssen\ wir\ noch\ mit\ R\ multiplizieren.$$

$$s = \left(\sqrt{\Delta lat^2 + q^2 * \Delta long^2}\right) * R$$

$$Anmerkung: Die\ obige\ Berechnung\ für\ die\ Loxodrome\ ist\ genauer.$$

Basierend auf Quelle [2]

- Diese Berechnungen können selbst erprobt werden:
  Calculate distance, bearing and more between two Latitude/Longitude points
- Um auch passende Eingabewerte zu haben, empfiehlt sich die folgende Seite:
  Geographische Koordinaten von Städten in aller Welt

Quellen:

[1] Alexander, James: *Loxodromes: A Rhumb Way to Go,* Seite 5,
Online: http://www.cwru.edu/artsci/math/alexander/mathmag349-356.pdf,
Zugriff am 25. Juni 2009

[2] *Calculate distance, bearing and more between two Latitude/Longitude points*,
Online: http://www.movable-type.co.uk/scripts/latlong.html ,
Zugriff am 25. Juni 2009.